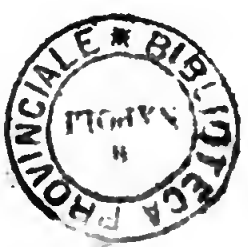
ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

DESCRITTIVA



C 10739

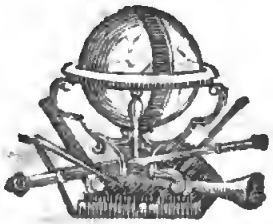
(1

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA

DI V. FLAUTI.



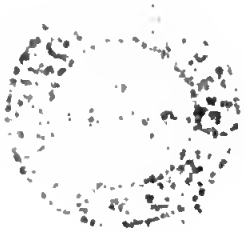
BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

ROMA

Da' torchj di Luigi Perego Salvioni

MDCCCVII.

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI



PREFAZIONE.

E' un problema della Geometria Elementare da tutti conosciuto, quello di abbassare da un punto dato una perpendicolare ad una retta data, o di tirarle per esso una parallela: la costruzione che ne dà Euclide è però soddisfacente nél solo caso, che i due dati sono in un piano di sito o nelle due dimensioni, nè sarebbe più valevole a soddisfarci, se essi si supponessero nello spazio, con tutto che appartengansi questi due casi ad uno stesso Problema generale, e sieno fondati sugli stessi principj. Ciò essendo comune a tutti que' Problemi ne' quali vi entrano dati di posizione; si vede bene che la Geometria Elementare è mancante per questa parte, e che tutte le quistioni di questo genere che in essa si propongono, meritano di essere estese e sciolte nello spazio.

Gli artisti a' quali si rendeva importante un tal nuovo genere di soluzioni, ne avevano già da gran tempo fatte molte, rappresentandone i dati ed il quesito per mezzo de' loro determinanti su di piani di posizione; ma non proponendosi essi altro oggetto per queste loro ricerche, che l' immediata ap-

plicazione alle arti nelle quali ne abbisognavano, erano perciò le loro costruzioni, mancanti intieramente di nesso, sprovvedute per lo più di dimostrazione, e poco atte a dar lume alla soluzione di altre quistioni analoghe: in una parola la geometria delle tre dimensioni mancava affatto, e lo snodamento di un Problema di questo genere non era che un puro e malagevole tentativo.

Verso la fine del decimottavo secolo, un Geometra d'Oltremonti (1) ha intrapreso di questo lavoro; e la Geometria delle tre dimensioni, da lui chiamata Geometria Descrittiva, *ha cominciato ad avere nelle sue mani la precisione del linguaggio, ed un nesso conveniente ad un ramo della Geometria in generale.*

I Geometri che avevano ricevuti dagli artisti i principj su de' quali si sono fondati, hanno ad essi offerto a vicenda un compenso grandissimo, facilitandoli la soluzione di tutti i Problemi di questo genere, e risolvendone molti, i più importanti ed anche più difficili: e le arti di costruzione, che avevan posto questi nel bisogno d'occuparsene, sono divenute una pura applicazione delle soluzioni di una tale scienza, ed hanno ricevuta un' estensione ed esattezza maggiore.

Non offrendo però l'analisi de' moderni, malgra-

---

(1) Il Sig. Monge.

do sì copiosa luce da essa versata sulla soluzione de' Problemi Geometrici, verun metodo generale e comodo, onde risolvere quei che riguardano sito e posizione, nel genere de' quali comprendonsi tutti quelli della Geometria Descrittiva; si sono veduti perciò nell' obbligo i due Valentissimi Analisti Monge e La-Croix, *di trattar colla sintesi un tal ramo di Geometria: e questo metodo, che con grave danno delle Matematiche era stato, dopo dell' applicazione che si è fatta dell' Algebra ad esse, trascurato, ha mostrato di nuovo la sua importanza.*

Un' opera compresa intieramente nella Geometria degli antichi richiedeva dunque per necessità di esser trattata per quanto fosse possibile, coll'istesso rigore che gli Elementi di Euclide; era questo il solo mezzo da spargere in essa della facilità e della chiarezza; ed è a ciò, che mi sono principalmente rivolto in questi miei Elementi. Ho sempre cercato di disporre con un nesso geometrico le soluzioni de' Problemi, ed ho così evitato di compilare in uno la costruzione di un' altro, che o si era o si doveva anticipatamente sciogliere. Ho cercata sempre l'eleganza della soluzione, tanto amata da' Geometri rigorosi; persuaso, che se essa è interessante in un Ploblema di Geometria Elementare, lo deve essere molto più in un' altro, la cui costruzione deve praticamente eseguirsi nelle arti alle quali si applica. In fine, per facilitare a' giovani la soluzione di al-

tri Problemi di questo genere, ho lasciata l'analisi geometrica unita alla costruzione del Problema; ciò è anche servito ad evitar le dimostrazioni, che sarebbero sicuramente riuscite lunghe, penose e complicate. Spero che voglia così un tal mio lavoro riuscir utile a' Giovani, e gradito a' coltivatori della Geometria degli antichi.

TAVOLA

DELLE MATERIE

Contenute in questo Volume.

PREFAZIONE. Pag. v

N.

1—4 *Definizioni che riguardano l'oggetto della Geometria Descrittiva e le principali nozioni che le appartengono.* Pagina 1—2

CAP. I. Considerazioni Geometriche per determinare il sito di un punto nello spazio.

5—9 *Ricerche Geometriche su i determinanti del sito di un punto nello spazio.* 2—10

10—25 *Teoria delle projezioni.* 10—15

26—27 *Problemi fondamentali per le seguenti costruzioni, che dalle precedenti teorie immediatamente derivano.* 16

CAP. II. Soluzioni di alcuni Problemi elementari relativi alla linea retta ed al piano.

28—30 *Considerazioni sulla genesi di un piano, e maniera di designarlo nello spazio.* 17—18

31—49 *Problemi che forman l'oggetto di questo Capitolo.* 18—32

CAP. III. Ricerche su i piani tangenti e sulle normali alle superficie curve.

P. I. De' piani tangenti una superficie curva che passano per un punto dato in essa.

50 *Esposizione de' motivi, che hanno indotti i Geometri Descrittivi alla ricerca di un metodo diverso dalle projezioni, per esprimere il sito di una superficie curva nello spazio.* 33—36

51—52 *Teorema fondamentale di questo metodo: Dilucidazioni su di esso: genesi del* cono cuneo *di* Wallis; *determinazione della curva che segna su di questa superficie un piano segante, parallelo alla sua base; genesi delle superficie difformi in generale.* 37—41

53—55 *Conseguenze di un tal Teorema, e Def. del piano tangente e della normale ad una superficie curva.* 42—43

56—65 *Sbozzo del metodo generale per tirare un piano tangente ad una superficie curva per un punto dato in essa, e sua applicazione alle superficie cilindriche, coniche, di rivoluzione e difformi.* 43—51

66 *Probl. per la normale ad una curva.* 52

P. 2. De' piani tangenti le superficie curve tirateli per de' punti dati fuori di esse.

67 *Condizioni che esigonsi, perchè resti determinato nello spazio il sito di uno di questi piani.* 52—53

68—76 *Problemi che riguardano quest' argomento.* 54—64

Cap. IV. Delle intersezioni delle superficie curve.

78 *Parallelo tra i metodi dell'analisi e le operazioni della Geometria Descrittiva.* 65—69

79—85 *Cosa s'intende per* costruzione dell' intersezione ec. : *due Problemi generali circa la costruzione e le tangenti di una curva d'intersezione : Teorema che si ricava dal seçondo di questi Problemi .* 69—74

86—101 *Costruzioni delle intersezioni di diverse superficie curve .* 74—95

Cap. V. Dello Sviluppo delle superficie curve .

102—103 *Definizione dello Sviluppo ; caratteri che lo rendono possibile , ricavati dalla Geometria .* 95—96

104—107 *Sviluppo della superficie cilindrica e conica .* 96—100

Cap. VI. Applicazione de' metodi precedenti alla soluzione di alcuni Problemi di Geometria .

108—111 1.° e 2.° *Problema .* 101—104

112—113 3.° e 4.° *Problemi , che sono la composizione Geometrica del* 1.° e 2.° *del* 1.° *Capitolo .* 105—107

114—115 *Soluzioni Geometrica e Descrittiva del* 5.° *Problema , e di quell'altro di Geometria Elementare sul quale è fondata ciascuna costruzione di esse due soluzioni .* 107—109

116—117. 6.*Problema;maniera da determinare il numero delle intersezioni delle locali che lo costruiscono;soluzione meccanica dello stesso.* 109—113

118 7.° *Problema .* 114

Indice delle note.

Pag. 4 *Si dimostra che tre superficie sferiche s'intersegano in due punti.*

6 *S'indica come possansi intersegare tre superficie cilindriche a base circolare in* 8 *punti.*

29 *Soluzioni Geometrica e Trigonometria del Probl. proposto n.°* 47, *pag.* 28.

32 *Soluzione Geometrica del Probl. proposto n.°* 49 *pag.* 30.

33 *Parallelo tra la Geometria Descrittiva e l'analisi.*

61 *Dimostrazione di una verità geometrica da* Lacroix *data come forse non facile a dimostrarsi a priori.*

110 *Soluzione analitica del Probl.* 48, *indicata.*

ELEMENTI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA

DEFINIZIONI.

1. La *Geometria Descrittiva* ha per oggetto di esibire in un piano il convenevol disegno di grandezze geometriche date nello spazio.

2. Lo *spazio* è un' estensione di trina dimensione, illimitata e similare.

Si rileva da questa definizione, che non essendo distinguibili le parti dello spazio; il sito di un punto in esso, non possa esser definito per rispetto alle sue parti; ma che bisogna necessariamente rapportarlo ad alcuni altri oggetti dati anch'essi di posizione, e distinti dalle parti dello spazio che gli contiene. Ed affinchè un tal maneggio sia di un' uso facile e giornaliero, si esige, che sieno questi oggetti tanto semplici, quant' è possibile, e che la loro posizione sia la più facile a concepirsi.

3. Chiamasi *projezione* di un punto su di un piano, il piede della perpendicolare abbassata da un tal punto su di esso piano: e questo dicesi *piano*

di projezione. Una tal perpendicolare è l'altezza del punto dato sul piano di projezione.

4. Un piano che s'inclini ad un' altro, si dirà *abbattuto* su di questo, se girando intorno alla loro comune sezione, si adatti su quell'altro, o vi formi una continuazione.

CAP. I.

Considerazioni geometriche per determinare la posizione di un punto nello spazio.

5. Il primo passo che deve dare il Geometra descrittivo per avanzarsi in questa scienza, è la ricerca del più facil modo, onde determinare il sito di un punto nello spazio; poichè una tal determinazione ne trae seco l'altra del sito delle linee e delle superficie, la posizion delle quali dipende necessariamente dall'altra di alcuni loro punti. In fatti, quella di una retta dipende dalla fissazione di due suoi punti; e da tre disposti in triangolo, l'altra di un piano.

Or una tal ricerca non consistendo in altro, come sopra abbiam detto, che in vedere tra gli oggetti più semplici, che si possono assegnare nello spazio per definire il sito di un punto, quali sieno quelli che danno pe' maneggi di un' uso abituale facilità maggiore nell'esecuzione; e siccome i più semplici oggetti che la Geometria conside-

ra, non sono, che i punti, le linee ed i piani; è necessario esaminare di qual di questi tre determinanti sia più vantaggioso servirsi. Incomincerò un tal'esame dal punto, che non avendo dimensione veruna, è più semplice della linea, che ne ha una sola, e del piano che ne ha due.

PROP. 1. PROBL. 1.

6. *Determinare quanti punti debbano esser dati nello spazio, perchè si conosca il sito di un' altro punto A rapportato ad essi.*

Sol. Se fosse data la sola distanza che un tal punto *A* serba da un' altro *B* dato; sarebbe luogo geometrico di esso punto *A* la superficie di una sfera, che ha per centro il dato punto *B*, e la distanza data *BA* per raggio. Non resta dunque determinato il sito del punto *A*.

Se fosse inoltre data la distanza che il punto *A* serba da un' altro punto *C* dato; apparterrebbesi anche esso punto A ad un' altra superficie sferica avente il punto *C* per centro e *CA* per raggio; e dovendo esso punto ritrovarsi nel tempo stesso in ciascuna di queste due superficie sferiche, dovrà essere un di quelli della linea circolare nella quale tali due superficie s'intersegano. Questa nuova condizione dunque aggiunta alla prima non è neppur bastante a determinare il punto in quistione.

Procediamo dunque ad aggiugnervene una terza,

ed a dar la distanza del punto *A* da un terzo punto *D* dato; troverassi, per soddisfare a questa nuova condizione, il punto *A* allegato in una terza superficie sferica il cui centro è il punto D, e 'l raggio la data distanza *DA*; ma doveva anche trovarsi in ciascun' altra delle precedenti. Dunque sarà uno de' due punti d'intersezione di esse tre superficie sferiche, e quindi determinato (1). Ed è

---

(1) *Per non lasciare verun dubbio nell'animo de' Giovani; dimostrerò, ciò che quassù ho assunto,* che tre superficie sferiche s'incontrano in due punti: *la qual cosa per altro è facile a comprendersi.*

Fig. 36. *Si concepisca passare pe' centri* B, C, D *delle tre sfere un piano, che le segherà ne' loro rispettivi cerchi generatori; e se si uniscano i punti corrispondenti ne' quali s'incontrano a due a due questi tre cerchi, le congiungenti* EF, GK, *dovranno intersegarsi in uno stesso punto* a.

Poichè se una di esse, come la HJ *segasse le altre due in* s, r; *il rettangolo* JrH *essendo minore di* JsH *e quindi dell'uguale* EsF, *sarebbe molto minore di* EaF *o dell'uguale* KaG, *e perciò anche minore di* KrG, *cui esso dev' essere uguale. Dunque la retta* HJ *deve necessariamente passare pel punto* a. *Ciò posto*

Rivolgendosi i due cerchi EGK, EFH *intorno al-*

chiaro che se s'indichi di più qual verso tiene un tal punto per rispetto al piano che passa pe' tre punti dati, resti esso assolutamente determinato.

PROP. 2. PROBL. 2.

7. *Esibire il numero delle linee rette per rispetto alle quali deve esser data la posizione di un punto, perchè resti determinato il suo sito nello spazio.*

---

la retta BC, *la retta* FXE, *ch'è perpendicolare alla* BC *genera co' suoi estremi* FE *la circonferenza di un cerchio normale al piano* BCD *e ch'è l'intersezione delle due superficie sferiche da essi cerchi generate.*

Similmente la superficie della sfera generata dal cerchio KHG, *incontra le due altre in due cerchi ciascuno perpendicolare al piano stesso* BCD, *e generati rispettivamente dalla rivoluzione delle* KG, HJ *intorno a' punti* Y, Z. *Dunque le tre superficie sferiche avran di comune intersegandosi que' punti ne' quali si tagliano le circonferenze di questi tre cerchi. Or tali cerchi debbon tutti passare per una retta perpendicolare in* a *al piano* BCD, *ed aver comune l'ordinata che corrisponde a ciascun di loro in esso punto* a, *e quindi incontrarsi in due punti. Tanti saran dunque anche i punti di comune alle tre superficie proposte.*

Sol. Incominciamo dal supporre data la posizione di un tal punto per rispetto ad una sola retta di sito, cioè che sia data la distanza che da questa ne serba; avrà esso per suo luogo geometrico la superficie infinita di un cilindro retto, che ha per asse la retta data, e per raggio la data distanza. Dunque non basta questa sola condizione a determinare il sito di un tal punto.

Aggiugnendovi l'altra, che serbi lo stesso punto una distanza data da una seconda retta di sito; apparterrassi esso ad un' altra superficie cilindrica, che ha per raggio questa distanza, ed una tal retta per asse; e dovendo soddisfar anche alla prima condizione, dovrà essere uno di quelli della curva d'intersezione di queste due superficie. Continuerà dunque ad essere indeterminato il suo sito.

Suppongasi perciò esser data anche la distanza di un tal punto da una terza retta di sito: ragionando come sopra, si troverà esser esso uno di quelli otto punti ne' quali s'intersega la superficie cilindrica che ha per asse questa retta data, e per raggio la data distanza, colle due precedenti (1), e quindi determinato.

---

(1) *La nota presente non ha già per oggetto di dimostrare che tre superficie cilindriche a base circolare abbiano generalmente otto punti di comune,*

Dunque la determinazione di un punto nello spazio, rapportandolo a linee rette date di posizione, esige che queste sieno tre; ed allora il Probl. dà otto soluzioni del pari soddisfacenti; e sarà facil tra queste il trovar quella, che dia un punto solo soddisfacente ad una qualche quistione particolare, sol che vi si aggiungano alcune condizioni particolari del genere di quelle, delle quali abbiam dato un' esempio nel caso de' punti.

---

come si è quì supposto; ma solamente di far comprendere, come possa questo aver luogo.

Si supponga una superficie cilindrica penetrarne un' altra di un diametro maggiore che 'l suo, ed in modo che gli assi loro s'incontrino sotto un' angolo molto acuto. E' evidente che quella traverserà questa da parte a parte segnandovi due curve simili e molto allungate, una all' entrata sua in essa, e l'altra nell'uscirne. Supponiamo adesso, che una terza superficie cilindrica di un diametro medio in grandezza tra quelli delle altre due, penetri quella che ha il massimo diametro in modo, che i loro assi s'incontrino sotto un' angolo poco men che retto, e tal che essa traversi le due sezioni già segnate su di questa, presso a poco nel loro mezzo: segnerà anche questa sulla superficie cilindrica grande due altre curve, le quali essendo più larghe e meno lun-

PROP. 3. PROBL. 3.

8. *Determinare quali condizioni esigonsi, perchè la posizione di un punto resti determinata nello spazio per rispetto a piani dati di posizione.*

Sol. Se fosse data la distanza di un tal punto da un solo piano, soddisfarebbero a questa condizione tutti i punti di due piani paralleli al proposto e distanti da esso per la retta data, uno a destra e l'altro a sinistra. Il suo sito resterebbe dunque indeterminato.

Se oltre a ciò fosse anche data la distanza di esso punto da un'altro piano dato; sarebbero luoghi di un tal punto due altri piani paralleli al dato e che ne distino per la retta data, uno a de-

---

ghe delle due prime, ciascuna di esse segherà la corrispondente di quelle in quattro punti. Vi saran così quattro punti comuni alle tre superficie cilindriche sulla faccia anteriore di quella che ha il massimo diametro, e quattro sulla faccia posteriore dell'istessa. Dunque esse ne avranno generalmente otto di comune.

In alcuni casi particolari facili ad immaginarsi, questo numero può ridursi a sei, a quattro, a due ed anche a zero, secondo la grandezza e posizione diversa che hanno le superficie cilindriche proposte.

stra e l'altro a sinistra. E combinando queste due condizioni, troverassi un tal punto aver per suo luogo geometrico una di quelle quattro rette, che sono le intersezioni di questi quattro piani. Il suo sito non si è perciò determinato ancora.

Bisognerà dunque aggiugnervi una terza condizione, e supporre anche data la sua distanza da un terzo piano di sito; troverassi perciò allogato un tal punto in due altri piani distanti dal dato per la retta data, uno a destra e l'altro a sinistra. Sarà perciò esso uno di quelli otto punti ne' quali s'intersegano le tre paja di piani, che soddisfano separatamente alle tre condizioni stabilite.

Finalmente se indicando la distanza, che ciascun piano dato serba dal punto dimandato, si dinoti anche il verso che tiene un tal punto nello spazio per rapporto a ciascuno di questi piani, ognun de' tre luoghi geometrici del presente Probl. si ridurrà ad un piano solo; e sarà il punto in quistione quello nel quale s'intersegano questi tre piani, e per conseguenza intieramente determinato.

Dunque si esigono tre piani dati di posizione, affinchè resti determinato per rapporto ad essi il sito di un punto nello spazio.

9. *Scol.* Risulta da questi tre Probl., che il metodo di determinare il sito di un punto nello spazio rapportandolo a rette di sito, sia meno semplice dell'altro di rapportarlo ad altri punti dati in esso;

e che lo più semplice, e di più agevole costruzione tra i tre proposti, sia quello di rapportarlo a tre piani di sito: è perciò che i Geometri ne' Probl. di questo genere sciolti coll'ajuto dell'algebra, sono sempre ricorsi a determinar la distanza da tre piani di posizione per cercare il sito di un punto.

La Geometria Descrittiva però, possiede un metodo più semplice atto a tal' uopo, pel quale non esigonsi esplicitamente che due soli piani dati di posizione, supponendosi il terzo passare pel punto dato, ed esser perpendicolare a questi due. Un tal metodo che passo ad esporre, è quello delle projezioni.

Prop. 4. Teor. 1.

10. *Resterà determinato nello spazio il sito di un punto, se sieno date le sue projezioni su due piani non paralleli.*

Dim. Poichè essendo un tal punto l'intersezione delle normali a' piani dati innalzatele dalle projezioni sue su questi (n.° 3.); ed essendo queste date di sito, sarà anche dato di sito esso punto.

11. *Cor.* In appresso, sempre che dirò esser dato un punto, intendasi che ne sien date le sue projezioni su due piani di sito, che s'incontrano.

12. *Scol.* Una sola projezione di un punto, non è sufficiente a determinarlo; poichè essa rappresenta nel tempo stesso le projezioni di tutti gli altri

punti della perpendicolare innalzata dalla projezione data sul piano di projezione.

Prop. 5. Teor. 2.

13. *Le projezioni di tutti i punti di una retta sono allogate in un' altra retta.*

Dim. Imp. tutte queste projezioni vengono ad essere allogate nell'intersezione del piano di projezione con quell' altro perpendicolare ad esso, che passa per la retta; e quindi in un' altra retta.

14. *Cor.* Ne segue da ciò, che per determinare le projezioni di una retta su di un piano, basta determinare le projezioni di due suoi punti su di questo piano. Dunque

15. *Def.* Quella retta che unisce su di un piano le projezioni di due punti esistenti nello spazio, è la *projezione* su questo piano della retta che passa per essi due punti.

16. *Cor.* Quindi se la proposta retta è perpendicolare al piano sul quale si projetta, il suo punto d'incontro con questo, sarà la sua projezione; e se gli è parallela, adequerà essa la projezione sua.

17. *Def.* Una retta si dirà parallela ad un piano, se essa è parallela alla sua projezione su di questo.

18. *Cor.* Quindi se per un punto preso in un piano si tiri una parallela ad una retta, che ad es-

so piano è parallela, dovrà tal retta giacerne nel piano stesso.

Di più, se per un punto di una retta data si tiri una parallela ad un' altra retta anche data, il piano che passerà per quelle due rette ad angolo sarà a questa parallelo.

Prop. 6. Teor. 3.

19. *Se sono date le projezioni di una retta su due piani non paralleli, sarà data pure la sua posizione.*

Dim. Poichè se si suppongano passare per esse projezioni due piani normali a' piani dati, questi saran dati di posizione. Dunque anche di posizione dovrà esser data la comune sezione loro, ch'è la retta proposta.

20. *Cor.* Dirò dunque data la posizione di una retta, ogni volta che se ne sappiano le sue projezioni su due piani di posizione che s'incontrano.

21. *Scol.* Una sola projezione di una retta, non basta a determinarne il sito; essendo essa comune a questa retta, ed a tutte le altre che ritrovansi nel piano innalzato per la projezione data perpendicolarmente a quello di projezione, e che chiamasi *piano projettante*.

22. *Avv.* Sebbene tutto ciò che ne' numeri precedenti abbiam detto, sia indipendente dalla posizione rispettiva de' piani di projezione, i quali possonsi perciò inclinare sotto un' angolo qualunque

pur tuttavia, potendo ciò in alcuni casi esser causa di qualche inesattezza in pratica, si è convenuto di prenderli l'uno perpendicolare all'altro; purchè però delle particolari considerazioni non mostrino, che altrimenti facendo si abbia facilità maggiore. E siccome gli artisti in pratica sogliono servirsi per le projezioni, di un piano orizzontale e di un' altro che passa per un filo a piombo su di questo, cioè verticale, così per una facilità anche maggiore soglionsi prendere questi due ultimi per piani di projezione.

Di più, dovendosi per gli usi pratici rappresentar le due projezioni in disegno su di uno stesso foglio di carta, o su di una stessa aja, si sono perciò determinati gli artisti a supporre, che il piano verticale fosse abbattuto. La projezione verticale è dunque sempre disegnata su di un piano orizzontale, e per farsi un' idea dell'oggetto disegnato, bisogna immaginar sempre, che una rivoluzione convenevolmente fatta in senso contrario rimetta il piano abbattuto nel suo primiero sito; ed è per questo motivo che bisogna segnare con una linea più forte la comune sezione de' piani di projezione nel disegno.

Così, nella *fig.* 1. la projezione verticale $a'b'$ di una retta AB esistente nello spazio, non si esegue realmente sul piano verticale $PQL'M'$; ma si bene sull'altro $P'Q'L'M'$ che rappresenta quello ab-

battuto in sito orizzontale. Una tal disposizione, indipendentemente dalla facilità di esecuzione che dà al disegno, ha ancora il vantaggio di abbreviare il travaglio delle projezioni. Supponendo in fatti che i punti a, a' sieno le due projezioni del punto A, il piano che passa per le Aa, Aa', essendo perpendicolare nel tempo stesso a' due di projezione, dovrà essere anche perpendicolare alla loro comune sezione $L'M'$; alla quale insisteranno per conseguenza perpendicolarmente le $A'a$, $A'a'$, intersezioni rispettive di quel piano stesso co' due di projezione. Or quando si abbatte il piano $PQL'M'$; non dovendo mai cessare la retta $A'a'$ dall'essere perpendicolare alla $L'M'$; lo sarà anche, allorchè essendosi abbattuto un tal piano, essa ha presa l'altra posizione $A'a'$ ed in un tal sito del piano verticale, le due rette $A'a'$, $A'a$ non ne rappresentano che una sola perpendicolare alla $L'M'$.

23. Dunque, *se sia data la projezione di un punto su di uno de' piani di projezione; la sua projezione sull'altro, esisterà nella perpendicolare indefinita, che dalla projezione data si abbassa sulla comune sezione de' piani di projezione*. Questo risultato è di un' uso frequente nella pratica.

24. Finalmente, è facile il comprendere, che sia sempre la Aa uguale alla $A'a'$; e la Aa' uguale alla $A'a$; cioè: *Che l'altezza di un punto su di uno de' piani di projezione è sempre uguale alla perpen-*

dicolare, che dalla projezione di esso punto sull'altro de' piani di projezione, si abbassa sulla comune sezione di questi.

25. Combinando adesso ciò che nel precedente n.° si è detto col n.° 17., si vedrà, che se una retta è parallela ad uno de' piani di projezione sull' altro di questi, debba essere anche parallela alla comune sezione di essi piani (1).

---

(1) *N. B. Per render più facili a concepirsi in disegno le diverse parti di una figura, le ho dinotate con differenti lettere: le majuscole indicano i punti esistenti nello spazio; e queste stesse segnate con un' apice, quelli della comune sezione de' piani di projezione. Di più, ho segnate con lettere piccole i punti esistenti nel piano di projezione orizzontale; ed ho aggiunte a queste un' apice per dinotarne quelli che sono sul piano di projezione verticale. Ho avuta anche l'avvertenza di segnare i punti dello spazio e le loro corrispondenti projezioni colle stesse lettere; ed a fine di render meno complicate le figure, e più intelligibili le soluzioni, ho sempre supposto, che ciò che doveva aver luogo in ciascun Probl., succedesse in un solo de' quattro angoli de' piani di projezione; supposizione, la qual niente detrae alla generalità de' Probl., e che non toglie i mezzi da far diversamente, quando ciò non si avvera. Finalmente debbo anche avvertire, che ho segnate con puntini tutte le linee di costruzione.*

PROP. 7. PROBL. 4.

26. *Date le projezioni di una retta su due piani normali; determinare il punto dove questa incontra ciascuno di essi.*

Sol. Si produce una delle projezioni, per es. la $b'a'$, finchè incontri la $L'm'$ in C'; se da C' s'innalzi su di $L'm'$ nell'altro piano di projezione la perpendicolare $C'c$; è chiaro esser questa l'intersezione di un tal piano con quello che projetta la $b'a'$; dovrà perciò il punto dell'incontro che cercasi trovarsi nella $C'c$; ma deve esso trovarsi anche nella ca. Dunque sarà il punto c dove queste due rette prodotte s'incontrano. *Fig.* 2.

PROP. 8. PROBL. 5.

27. *Date di magnitudine le projezioni di una retta; determinare la sua lunghezza.*

Sol. S'intenda per l'estremo suo A di minor altezza per rispetto ad uno de' piani di projezione, come l'orizzontale, tirata l'AC parallela alla projezione ab di essa retta su questo piano, ed una tal parallela concepiscasi arrestare alla Bb, sarà $AC=ab$, ed $Aa=CB$: non resta dunque per determinar la grandezza della AB, che a costruire il triangolo rettangolo ACB. A tal'oggetto, si tiri per a' projezione del punto A sull'altro piano di projezione la retta $a'c'$ parallela alla $L'm'$, sa- *Fig.* 1. *Fig.* 3.

rà c' la projezione su di questo stesso piano del punto C dello spazio, e quindi la $c'b'$ pareggerà la CB (n.° 16.) Se dunque si produce la $c'a'$ in h', finchè sia $c'h'$ uguale alla ab, congiunta la $b'h'$, sarà questa la lunghezza della AB.

CAP. II.

Soluzione di alcuni Probl. elementari relativi alla linea retta ed al piano.

28. Se suppongasi uno de' lati di un'angolo rettilineo muoversi in modo, che tutti i suoi punti descrivano delle rette parallele all'altro, verrà esso a generare un piano, la cui posizione dipende da quella di queste due rette, ciascuna delle quali può riguardarsene come la generatrice.

I Geometri descrittivi per facilitare il metodo delle projezioni, e per alcune altre ragioni che adduremo nel Cap. seguente, han trovato vantaggioso di prendere per determinanti della posizione di un piano le due sue generatrici. E siccome è arbitraria la posizione di queste due linee nel piano che debbono esse generare; han cercato perciò di scegliere pel metodo delle projezioni quelle, che esigono una costruzione più semplice, ed han convenuto doversi indicare la posizione di un piano, col dar quella delle due intersezioni sue con ciascuno de' piani di projezione, e queste per brevità

maggiore le hanno chiamate *tracce*. Ed in generale.

29. *Def.* Chiamasi *traccia* di una superficie qualunque, la linea del suo incontro con uno de'piani di projezione; e si dirà essa *verticale* o *orizzontale*, secondo che l'incontro succede con quel piano o pur con questo.

30. *Scol.* Per brevità suol chiamarsi anche traccia orizzontale o verticale di una retta, quel punto dov'essa incontra l'uno di questi piani, o pur l'altro.

PROP. 9. PROBL. 6.

31. *Costruire le projezioni di una retta tirata per un punto dato parallela ad un'altra retta data.*

Sol. La retta cercata, dovendo esser parallela alla data, ciascuno de' due piani projettanti la prima, dovrà esser parallelo al corrispondente piano che projetta la seconda. Quindi le loro intersezioni co' rispettivi piani di projezione, che sono, come è chiaro, le projezioni corrispondenti di esse due rette, saranno tra loro parallele; ma debbono anche le projezioni della retta da tirarsi passare per quelle del punto dato rispettivamente. Dunque saranno esse le parallele che per queste projezioni si tirano alle rispettive projezioni della retta data.

PROP. 10. PROBL. 7.

32. *Costruire le tracce di un piano tirato per un punto dato parallelo ad un'altro piano dato.*

Sol. Le tracce da costruirsi, è già noto dagli Elementi di Solida, che debbono esser parallele a quelle del piano dato; resta dunque a determinarsi in uno de' piani di projezione un punto, pel quale deve passare la traccia corrispondente. *Fig.* 4.

A tal oggetto pel punto dato D, s'intenda tirata una retta parallela alla traccia orizzontale $A'a$ del piano dato (n.° 31.); una tal retta che sarà orizzontale ed esisterà nel piano cercato, avrà per sua projezione orizzontale la retta $d F'$, tirata pel punto d projezione orizzontale del dato parallela alla $A'a$; e per projezione verticale l'altra parallela $d'f'$ alla $L'M'$ tiratale per la projezione verticale d' dell'istesso punto D: e se si determini il punto f ove una tal retta incontra il piano verticale (n.° 27.) apparterrassi questo, com'è chiaro alla traccia verticale dimandata, la quale sarà per conseguenza espressa dalla retta $f'E'$ parallela alla $a'A'$; e tirando per E' la $E'f$ parallela alla $A'a$, sarà questa la corrispondente traccia orizzontale.

PROP 11. PROBL. 8.

33. *Date due rette, far passare per una di esse un piano parallelo all'altra.*

Sol. Sieno ba, $b'a'$ le projezioni della retta BA
Fig. 5. per la quale si vuol far passar il piano; e b, a' i punti ov'essa incontra i piani di projezione, pe' quali punti debbono, com'è chiaro, passar le tracce del piano dimandato. Or se dal punto a' che ha per projezione orizzontale l'altro A' si tiri una parallela all'altra delle rette date CD (n.° 31.) e poi si determini il punto e ov'essa incontra il piano orizzontale; dovendo una tal retta esistere nel piano da costruirsi, dovrà la sua traccia orizzontale passare per e: sarà perciò essa la beB', e la verticale per conseguenza l'altra retta $B'a'$.

PROP. 12. PROBL. 9.

34. *Costruire le projezioni della comune sezione di due piani dati.*

Sol. Sieno $A'a'$, $B'b'$ le tracce verticali di essi
Fig. 6. piani, ed $A'a$, $B'b$ le orizzontali corrispondenti; sarà, com'è chiaro, il punto e' incontro delle prime tracce, e l'altro f incontro delle seconde, comune ad entrambi i piani; cioè saran questi due punti dell'intersezione dimandata. Quindi la projezione orizzontale di una tale intersezione si otterrà, com'è chiaro, projettando il punto e' in E' sul piano orizzontale, e poi congiungendo la fE' che sarà una tal projezione, e projettando il punto f in F' sul piano verticale, la retta $F'e'$ sarà la corrispondente projezione verticale di essa.

PROP. 13. PROBL. 10.

35. *Costruire le projezioni della perpendicolare abbassata da un punto dato su di un piano di sito: e quelle del suo incontro con esso piano.*

Sol. Parte 1. I piani projettanti la perpendicolare cercata, dovendo essere nel tempo stesso perpendicolari ed al piano sul quale essi la projettano, ed a quello di sito; saranno anche, com'è facile ad intendersi, le intersezioni loro co' rispettivi piani di projezione, perpendicolari alle tracce del piano di sito; ma debbono di più queste due rette passare pe' punti d, d' projezioni del punto dato, dinotandone esse le projezioni della perpendicolare che cercasi. Dunque verranno rappresentate dalle perpendicolari indefinite db, $d'b'$ che da' punti d, d' si abbassano sulle corrispondenti tracce $A'a$, $A'a'$ del piano di sito. *Fig.* 7.

Parte 2. Si produca la db sino ad F', donde s'innalzi sulla $L'M'$ la perpendicolare $F'f'$; saranno le bF', $F'f'$ le tracce del piano verticale che passa per la perpendicolare proposta; e poi costruiscansi le projezioni della comune sezione di questo piano col dato (n.° 34.), delle quali l'orizzontale sarà la bF' stessa, e la verticale sia $F'E'$.

Ciò posto, dovendo il punto d'incontro dimandato trovarsi nella comune sezione di questi due piani, la sua projezione verticale dovrà cadere nel-

la $f'E'$; ma deve una tal projezione trovarsi anche allogata nella projezione verticale $d'b'$ della perpendicolare già costruita. Dunque sarà essa il punto c' nel quale queste due rette s'incontrano: e se si projetti un tal punto in e sulla db nel piano orizzontale; sarà e l'altra projezione dello stesso.

36. *Cor* 1. Dalla prima parte del presente Problema si rileva, che *se una retta è perpendicolare ad un piano; le projezioni di quella debbano essere anche perpendicolari alle tracce di questo*.

37. *Cor.* 2. Dalla seconda parte di esso, si rileva poi il modo da trasportare le projezioni date di un punto nello spazio, da alcuni piani di projezione, su di altri piani dati; riducendosi tutta l'operazione, com'è evidente, a determinare le projezioni dell'incontro di uno di questi piani dati colla perpendicolare abbassatale da quel punto dello spazio che si vuol projettar su di esso; e rapportando nel modo stesso due punti su di un piano dato, si troverà rapportata su di questo piano la projezione della retta che essi determinano.

Prop. 14. Probl. 11.

38. *Costruire le tracce di un piano che passa per un punto dato, ed è perpendicolare ad una retta data.*

Fig. 8. *Sol.* Concepiscasi nel piano dimandato tirata pel punto dato una retta orizzontale prodotta fino ad incontrarne il piano di projezione verticale;

avrà una tal retta per projezione orizzontale la perpendicolare dc dal punto d, rispettiva projezione del dato, abbassata sulla ab projezione corrispondente della data retta; e rappresenterà la sua projezione verticale la parallela dal punto d' projezion verticale del dato, tirata alla $L'M'$. Ciò posto, si determini il punto h' ov'essa retta incontra il piano verticale (26.); donde si abbassi sulla projezione verticale $a'b'$ dalla retta di sito la perpendicolare $h'b'$, sarà questa la traccia verticale del piano dimandato (n.° 36.); e l'orizzontale sarà l'altra perpendicolare $A'b'$ che dal punto A' si abbassa sulla ab.

39. *Scol.* Volendo determinare anche quel punto ove s'incontrano il piano già esibito colla retta data, fa d'uopo operare esattamente come nella seconda parte del prec. Probl.

40. *Cor.* Sarà facile adesso il risolvere l'altro Problema, di *Abbassare da un punto dato nello spazio una perpendicolare su di una retta data in esso.*

Poichè se si faccia passare pel punto dato un piano perpendicolare ad essa retta, la perpendicolare cercata sarà quella retta che unisce il punto dato coll'incontro del piano colla retta data; e quindi le sue projezioni saranno le congiungenti le rispettive projezioni di questi due punti.

PROP. 15. PROBL. 12.

41. *Data una delle due tracce di un piano che passa per un punto dato; esibirne l'altra.*

Sol. La traccia data sia, per es., l'orizzontale $A'a$, nella quale prendasi un punto b, e si projetti in B' sul piano verticale; saranno le bd, $B'd'$ che uniscono i punti b, B' colle corrispondenti projezioni d, d' del punto dato, le rispettive projezioni della retta che tirasi dal punto b al dato; e che esiste perciò nel piano che passa per un tal punto e per la $A'a$. Se dunque si determini il punto b' ove una tal retta incontra il piano verticale (n.° 26.), congiunta la $b'A'$ sarà questa la traccia verticale dimandata.

Fig. 9.

PROP. 16. PROBL. 13.

42. *Costruire le tracce di un piano che passa per tre punti dati.*

Sol. Sieno a, b, c le projezioni orizzontali de' punti dati A, B, C, ed a', b', c' le verticali; è chiaro che le rette che uniscono queste projezioni su di uno stesso piano, sieno le projezioni rispettive di quelle che congiungono i corrispondenti punti dati.

Fig. 10.

Se dunque si determinino i punti e, d incontri delle AB, BC col piano orizzontale; la traccia orizzontale del piano cercato dovendo passare per

questi punti sarà la retta $ed E'$; e se il punto d' ove la BC, una delle tre congiungenti, incontra il piano verticale si unisca coll'altro E', sarà la $d'E'$ la traccia verticale dello stesso.

PROP. 17. PROBL. 14.

43. *Dati due piani; esibir l'angolo della loro scambievole inclinazione.*

Sol. Sieno $A'a$, $B'b$ le tracce orizzontali, $A'a'$, $B'b'$ le verticali de' piani dati; e si determinino le *Fig.* 11. projezioni, e la grandezza dell'intersezione loro ff' (n.° 34. e 27.): saran dati di specie e magnitudine i due triangoli $fA'f'$, $fB'f'$.

Ciò posto, prendasi nella projezione orizzontale fD' dell'intersezione un punto h ad arbitrio, e da esso si elevi sulla fD' la perpendicolare ehg che si produca fino ad incontrarne le $A'a$, $B'b$, saran date le rette eh, hg, ef, fg; ed è chiaro che se per la ehg si faccia passare un piano perpendicolare all'intersezione ff'; segherà questo i piani dati in due rette eH, Hg, che comprenderanno l'angolo dimandato.

Or essendo dati di specie e magnitudine i due triangoli feH, fgH, saran date le eH, gH lati di esso angolo: se dunque con queste e colla eg si compia un triangolo, sarà l'angolo dimandato quello ch'è sotteso dalla eg.

44. *Scol.* Sarà facile adesso il risolvere il seguente Problema inverso.

Date le tracce di un piano e le projezioni di una retta, ch'è in esso; inclinare per questa retta al piano dato un'altro piano sotto un'angolo dato.

In fatti sieno $A'a'$, $A'a'$ le tracce del piano dato, ed fD', $f'E'$ le projezioni della retta proposta; saranno i punti f, f' dove questa incontra le tracce del piano dato, due punti comuni anche alle tracce del piano dimandato.

Ciò posto, si determini la grandezza della ff' (n.° 27.), sarà dato di specie e magnitudine il triangolo $fA'f'$; indi da un punto h preso nella projezione orizzontale fD' della retta data, gli si elevi la perpendicolare he, sarà essa anche data, e se s'intenda passare per la eh un piano perpendicolare alla ff'; che incontri una tal retta in H, saranno le hH, eH perpendicolari ad essa ff', e la eH sarà un de' lati dell'inclinazione del piano dato all'altro da tirarsi. Or il triangolo efH essendo dato di specie e magnitudine, sarà data la fH; quindi nell'altro fhH rettangolo in H; essendo dati l'ipotenusa fh ed un cateto fH, sarà dato anche l'altro cateto hH. Se dunque colle tre rette eH, eH, hH si costituisca un triangolo eHh, e poi si formi al punto H della eH l'angolo eHg quanto il dato Z; prodotta la eh in g, sarà questo un punto della traccia orizzontale del piano cercato. Saran dunque tali tracce le rette fgB' $B'f'$.

PROP. 18. PROBL. 15.

45. *Date le projezioni orizzontali e verticali de' lati di un'angolo, esibire esso angolo.*

Sol. Sieno *ab*, *ac* le projezioni orizzontali, $a'b'$, $a'c'$ le verticali, ed i punti *d*, *e* gli incontri de' lati di un tal'angolo con uno de' piani di projezione; sarà data la *de* base dell'angolo da esibirsi; ma sono pur dati di magnitudine i suoi lati (n.° 27.). Dunque se costruiscasi un triangolo con queste tre rette date, sarà l'angolo dimandato quello che si oppone alla *de*. *Fig.* 12.

PROP. 19. PROBL. 16.

46. *Date le projezioni di una retta e le tracce di un piano; costruire l'inclinazione di una tal retta al piano.*

Sol. Nella projezione orizzontale *bc* della retta data si prenda un punto *d*, il quale si projetti in d' sulla projezione verticale $b'c'$ della stessa retta saranno *d*, d' le due projezioni di un punto *D* che le corrisponde in essa retta; e se da questi punti si abbassino sulle $A'a$, $A'a'$ tracce del piano dato, le perpendicolari *de*, $d'e'$, saranno queste (n.° 36.) le projezioni della normale su di esso piano abbassata dal punto *D*. Or questa normale e la retta proposta comprendono un'angolo ch'è complemento del dimandato, e che per conseguenza, esibito che si sarà pel probl. prec., darà anche il cercato. *Fig.* 13.

PROP. 20. PROBL. 17.

47. *Dato un' angolo, e le inclinazioni de' suoi lati al piano orizzontale: costruire la projezione di un tal' angolo su questo piano.*

Sol. Rappresenti A' la projezione orizzontale del vertice dell'angolo dato, ed $A'B'$ quella di un suo lato, pel quale suppongasi passare il piano di projezion verticale; dovrà trovarsi un tal vertice allogato nella verticale $A'a'$. Suppongasi esser esso il punto a' di questa, dal quale s'inclinino alla $L'M'$ le due rette $a'B'$, $a'C'$ sotto gli angoli $a'B'A'$, $a'C'A'$ uguali a quelli che ne rappresentano le inclinazioni date de' lati dell'angolo proposto al piano orizzontale; è chiaro che saranno tali rette quanto i lati di quest' angolo. *Fig.* 14.

Ciò posto: descrivasi col centro A' e col raggio $A'C'$ il cerchio $C'ef$, e poi costruito co' lati $B'a'$, $C'a$. e coll'angolo dato il triangolo $B'a'D$, si descriva coll' altro centro B' e con un raggio $B'e$ uguale alla base $B'D$ di questo triangolo un' arco di cerchio gch, è egli chiaro, che se congiungasi il punto e ove queste due circonferenze si segano coll' altro a', sia l'angolo $B'a'e$ quello appunto ch'è proposto nel Problema; e che perciò, congiunta la $A'e$ sia $B'A'e$ la sua projezione orizzontale dimandata.

48. *Scol.* Questo Probl., che può anche risolver-

si Geometricamente (1) o per mezzo della Trigonometria rettilinea (2) contiene un' operazione importantissima per *levare i piani*, conosciuta in pra-

---

(1) *Rappresenti a' il vertice dell'angolo dato, a'A' la perpendicolare da esso abbassata sul piano orizzontale, ed a'e, a'B' sieno i suoi lati.* *Tav. ult. Fig. a*

Prendasi la a'A' per data, il che può farsi, poichè i dati, e 'l quesito del Problema restan sempre gli stessi qualunque sia la grandezza di essa retta; saran dati di specie e magnitudine i due triangoli eA'a', B'A'a', e per conseguenza saran date di magnitudine le loro ipotenuse ea', B'a', ed i loro cateti eA', B'a': quindi essendo anche dato di specie e magnitudine il triangolo B'a'e, sarà data la eB'. Se dunque colle tre rette date eA', B'A', eB' si costituisca un triangolo, sarà l'angolo di un tal triangolo, sotteso dalla eB' la projezione orizzontale dell'angolo proposto.

(2) *Prendendo come nella prec. nota la a'A' come data, e risolvendo i due triangoli rettangoli eA'a' B'A'a' si determineranno le ea', B'a'; similmente risolvendo il triangolo ea'B', nel quale sono dati i due lati ea', B'a' e l'angolo compreso ea'B' si saprà la eb. Finalmente, risolvendo il triangolo eA'B' nel quale sono dati i tre lati, si farà noto l'angolo eA'B', ch'è la projezione cercata.*

tica col titolo di *riduzione di un' angolo dato all' orizzonte*. In fatti, se i punti principali di un luogo del quale vuol formarsene la carta si concepiscano congiunti con delle rette, si verranno a costituire de' triangoli, i quali ne daranno sulla carta la posizion rispettiva de' punti presi sul terreno, se si rapportino su di essa, mediante una scala, e si dispongano tra loro con quell'ordine che serbavansi sul terreno stesso. Or consistendo le principali operazioni geodetiche nella misura di questi angoli, e nel rapportarli direttamente sulla carta; e richiedendosi per questo secondo oggetto, ch' essi si trovino in un piano parallelo a questa; si vede chiaramente, che se il piano, nel quale giace un' angolo sia inclinato all'orizzonte, non debbasi rapportar sulla carta esso angolo, ma sì bene la sua projezione orizzontale, la quale si otterrà coll'artifizio di questo Probl., se con un' esatto strumento si misurino esso angolo, e quelli che i suoi lati fanno coll'orizzonte.

PROP. 21. PROBL. 18.

49. *Esibire le projezioni e la grandezza della minima distanza di due rette comunque date nello spazio; cioè di quella retta ch'è perpendicolare all'una ed altra di esse rette date.*

Sol. Sieno ab, $a'b'$ le projezioni di una delle ret-

te date AB, e cd, $c'd'$ quelle dell'altra CD. Si faccia passare per una di esse, come per la AB, un piano parallelo all'altra CD, e sieno $A'h'$, $A'h$ le tracce di un tal piano (n.° 33.); sarà la minima distanza cercata una di quelle perpendicolari che da un qualunque punto della CD si abbassa sul piano che gli è parallelo. Quindi, se prendasi nella cd un punto e, il quale si projetti in e' sulla $c'd'$, e poi da' punti e, e' projezioni rispettive di un punto corrispondente E della CD si abbassino sulle $A'h$, $A'h'$ le perpendicolari ef, $e'f'$; saran queste le projezioni di essa minima distanza (n.° 36.). Se dunque si determinino le projezioni g, g' del punto d'incontro di una tal perpendicolare col piano $hA'h'$ (n.° 35. p. 2.), la grandezza di ciascuna delle projezioni di una tal minima distanza sarà rispettivamente dinotata dalle eg, $e'g'$; e si potrà da queste determinare la grandezza di essa minima distanza (n.° 27.). *Fig.* 15.

Resta adesso a determinarne il sito; cioè a sapere il punto ove essa incontra una delle rette date.

Si tirino per g, g' le rette gK, $g'K'$ rispettivamente parallele alle cd, $c'd'$, saranno esse le projezioni della comune sezione del piano $hA'h'$, e dell' altro ad esso normale che passa per la cd (num. 17 e 31.); ed i punti K, K' in dove esse parallele incontrano le ab, $a'b'$, saranno le projezioni del punto d'incontro di questa comune sezione col-

la data retta *AB*: cioè, com'è evidente, del punto cercato (1).

---

(1) *La soluzione descrittiva di un tal Probl. è fondata intieramente sulla seguente ricavata dalla pura geometria elementare, e che sembrami per la sua eleganza e naturalezza preferibile a quella del Sig. Legendre recata in una nota della sua Geometria.*

Tav. ult. Fig. a

Sieno AB *e* CD *le due rette date. Si prenda in una di esse, per esempio, nella* AB *un punto* E *pel quale si tiri* EF *parallela alla* CD; *indi si concepisca per le* AB, EF *passare un piano, e su di questo caderne perpendicolarmente un' altro che passa per la* CD; *è chiaro che la retta* KL *nella quale questi s'intersegheranno, debba essere parallela alla* EF *e con ciò alla* CD. *Finalmente dal punto* H *intersezione delle* AB, KL *si abbassi sulla* CD *la perpendicolare* HG, *sarà questa normale anche alla* AB *e quindi la perpendicolare dimandata. La dim. è chiara dalla costruzione.*

CAP. III.

Ricerche su i piani tangenti e sulle normali alle superficie curve.

PARTE I.

De' piani tangenti una superficie curva, che passano per un punto dato in essa.

50. La convenzione di rappresentare il sito di un punto nello spazio per mezzo delle sue due projezioni su due piani di sito, non è solamente propria, come già s'è veduto, ad esprimere la posizione di una retta indefinita o terminata, e quella di un piano (num. 14, 28); ma è valevole anche a risolvere uno di que' principali Problemi che forman l'oggetto della Geometria Descrittiva, cioè a *Rappresentare su di un foglio di disegno, il qual non ha che due sole dimensioni, la forma e la posizione esatta di un' oggetto solido poliedro rigorosamente definito.*

Perchè data che è la rigorosa definizione di un corpo di questa specie; cioè a dire, conosciuta che si è la posizione de' lati suoi, o quella de' vertici de' suoi angoli conoscesi intieramente un tal corpo; ed è anche facile di rappresentarne la sua convenevole immagine su i piani di projezione (1).

(1) *Non ho proposto e risoluto verun Probl. di*

Ma se fosse un tal corpo terminato da una sola superficie curva, come quella di una sfera, o pur dall'unione discontinuata di più di queste, il metodo di esprimere la posizione sua, dando quella di ciascuno de' suoi punti, sarebbe non solamente

---

questa fatta, poichè non v'ha per una tale operazione alcuna regola generale: si vede in fatti, che secondo la maniera come è definita la posizione de' vertici degli angoli di un solido, la costruzione delle loro projezioni può essere più o meno facile; e che la natura dell' operazione deve assolutamente dipendere da quella di questa definizione.

E' precisamente di quest' oggetto, dice assai bene il Sig. Monge, come dell'Algebra, nella quale non v'è veruna regola generale per mettere un Probl. in equazione; dipendendo, in ciascun caso particolare, la via da tenersi dalla maniera come è espresso il rapporto tra le ignote e le note; e la facilità di comprendere questi rapporti, che chiamansi condizioni del Problema, e di esprimerli con eleganza per per mezzo di un' equazione, dipende dal genio e dall' esercizio. E' l'istesso della Geometria Descrittiva.

Gli esempj in gran numero, e 'l maneggio della riga e del compasso, faranno acquistare l'abitudine delle costruzioni, e manudurranno insensibilmente alla scelta de' metodi i più semplici ed i più eleganti in ciascun caso particolare. Ma siccome in analisi,

incomodo, impraticabile e poco esatto, ma anche mancante di fecondità, ed insufficiente.

Sarebbe incomodo, impraticabile e poco esatto, poichè esigendosi per esprimere la posizione di tutti i punti di una superficie di indicarne tutte le

---

posto che si è un Problema in equazione, esistono de' metodi per maneggiarla, e ricavarne il valore di ciascun' incognita; così nella Geometria Descrittiva, determinate che si sono le projezioni, esistono de' metodi generali per costruir tutto ciò che risulta dalla forma e posizione rispettiva de' corpi.

Questo parallelo tra la Geometria Descrittiva e l'Analisi, non è fuor di proposito, ne senza oggetto. Hanno queste due scienze tra loro i rapporti più intimi; e ne v'ha veruna quistione di Geometria Descrittiva, che non possa tradursi in analisi; come anche al contrario, quando le quistioni di analisi non eccedono tre incognite, ciascuna operazione analitica può esser riguardata come la scrittura di una costruzion geometrica.

Non è però da negarsi che l'analisi degli antichi sia più propria a trattare questi Problemi di sito, che non l'è quella de' moderni, la quale riesce più dura e più difficile; e se vi sono Problemi di Geometria Descrittiva alla quale va essa meglio applicata, saran questi quelli delle intersezioni, come generalmente lo indicherò nel Capitolo seguente.

loro projezioni su de' piani normali; e la projezione verticale di un punto, trovandosi sempre connessa coll'orizzontale in un foglio di disegno per mezzo di una retta perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione (n.° 23), il numero delle linee delle quali si verrebbe a caricare il disegno, essendo grandissimo, produrrebbe una confusione tanto maggiore quanto maggiore esattezza si cercasse darli.

Non essendo poi possibile di rappresentare su di un' estensione limitata in tutte le sue direzioni il disegno di una superficie senza limiti, come quella di un cono, di un cilindro ed anche del piano stesso; diverrebbe un tal metodo insufficiente: e sarebbe esso infecondo, non potendosi ricavare da una rappresentazione di simil fatta tutte quelle affezioni che forman l'oggetto delle considerazioni e delle operazioni che posson farsi sulle superficie curve.

Tutti questi motivi, hanno indotti i Geometri Descrittivi a ricercare un' altro mezzo soddisfacente, il qual fosse nel tempo stesso compatibile col primo, e che potesse supplirlo ovunque quello fosse insufficiente: un tal metodo è fondato sul seguente Teorema.

PROP. 22. TEOR. 18.

51. *Ogni superficie curva può riguardarsi come generata dal moto di una linea curva, la quale al variar di sito, o serba costante la sua forma e grandezza, o semplicemente la forma, o pur varia in tutte due queste cose.*

Dim. S'intenda una superficie curva qualsivoglia segata da tanti piani paralleli; produrranno questi in essa tante linee, le quali se saranno simili ed uguali, una di esse nel generar la superficie avrà serbata costante la sua forma e grandezza; avrà cambiata anche la sua grandezza, se tali sezioni sieno semplicemente simili, e se oltre a ciò sieno esse anche dissimili, si sarà tal generatrice mutata anche di forma.

52. *Scol.* 1. Per render più facile l'intelligenza di questo Teorema passo ad illustrarlo con alcuni esempj.

Le superficie cilindriche, delle quali n'è una quella del cilindro ordinario a base circolare, possonsi concepir generate in due diversi modi, o supponendo che una linea retta giri rasente il perimetro di una linea curva, restando sempre parallela ad un' altra retta di sito, che non giaccia nel piano di essa curva; o pure dal moto progressivo di questa curva, che faceva da direttrice nel primo caso, la quale appoggiandosi sempre con uno stes-

so suo punto sulla retta di sito, tutti gli altri suoi punti descrivano delle rette parallele a questa. Ed in queste due genesi diverse, la linea generatrice, sebbene cambj continuamente di posizione, non muta però nè la sua forma, nè la sua grandezza.

Similmente, è duplice la genesi di una superficie conica, potendo esser essa descritta, o da una retta indefinita, la quale stando fissa in un punto dato fuori del piano ove ne giace una curva, giri intorno a questo punto, sempre radendo il perimetro della curva data, che serve di direttrice al suo moto; ed in questa genesi la linea generatrice è costante di forma, e può esserlo anche in grandezza al varlar di posizione. O pure può la superficie di un cono concepirsi generata in un' altro modo, che per semplicità maggiore applicherò a quello a base circolare; cioè dalla circonferenza di un cerchio il quale scorra su di una retta dal centro suo tirata ad un punto preso fuori del piano ov' esso ne giace, ed in modo che resti sempre parallelo a se stesso, e che il suo raggio in ciascun' istante del suo moto sia proporzionale alla distanza del centro da questo punto. E in un tal caso, com'è chiaro, la linea generatrice, cambiando posizione, cambia anche grandezza.

Può del pari ogni superficie di rivoluzione, o esser generata dal moto di una curva piana, la quale gira intorno ad una linea retta situata in una

maniera qualunque nel piano di essa curva, così quella di una sfera vien generata dalla rivoluzione della semicirconferenza intorno al diametro; e considerandola in questo modo, la linea generatrice è semplicemente variabile di posizione. Ma può anche una superficie di rivoluzione concepirsi generata dalla circonferenza di un cerchio mosso in modo, che ritrovandosi costantemente il suo centro nell'asse al quale il suo piano è sempre perpendicolare, abbia esso il raggio, in ogni istante del suo moto, uguale alla distanza di quel punto ove il piano del cerchio taglia l'asse, dall'altro ove taglia una qualunque curva data nello spazio. Così la superficie di una conoide parabolica può intendersi generata da un cerchio, il cui centro trovasi sempre nell'asse di questa conoide, e che abbia per raggio in ciascun punto la perpendicolare all'asse, intercetta tra un tal punto, e la curva parabolica ch'è l'altra generatrice della conoide. Ed in questo caso la curva generatrice cambia di grandezza al cambiar posizione.

Finalmente se sul lato *CA* di un rettangolo *CADF* si descriva un simicerchio, che insista perpendicolarmente al piano di un tal rettangolo, e poi preso nella sua circonferenza un punto *B*, si ordini al diametro *CA* la *BG*, e poi pel punto *G* si tiri una parallela all'altro lato *AD* di esso rettangolo che si arresti alla *FD* tutte le rette *BE* *Tav. ult. Fig. b*

che uniscono i punti corrispondenti B, E, rappresenteranno la metà di un solido chiamato dal *Wallis* cono-cuneo.

Or se una tal superficie si seghi con un piano *cba* parallelo alla sua base CBA, unita la bg; è chiaro, che essendo simili i triangoli BGE, bgE, debba stare $BG : bg :: GE : Eg$, e quindi BG^2, cioè CGA, o $cga : bg^2 :: GE^2 : Eg^2$: il che indica che la curva *cba* sia un' ellisse, il cui asse maggiore è ca, ed il minore è la quarta proporzionale in ordine a GE, Eg, e ca.

Se dunque prendasi la curva circolare AGB come generatrice della superficie del *cono-cuneo*, è chiaro, che una tal generatrice, al cambiar posizione, muta anche la sua grandezza e la sua figura.

La superficie curva della quale abbiam considerata la genesi è una delle più semplici della famiglia di quelle, che sono chiamate *superficie difformi* (*gauches*); e che possonsi sempre concepir generate da una retta indefinita, la quale si muova in modo, che rada costantemente tre curve date, che sono perciò le direttrici del suo moto. E' facile il convincersi che una tal condizione possa aver luogo, se si concepisca una serie di superficie coniche aventi i loro vertici nella prima delle tre curve date, e per direttrice della loro retta generatrice l'altra di queste; è evidente, che i punti ne' quali queste superficie incontrano la terza cur-

va ; determinino le posizioni differenti de' lati della superficie difforme .

Sieno MEN, $M'E'N'$, $M''E''N''$ le tre curve direttrici date . Prendasi nella prima un punto qualsivoglia E ; la superficie conica , che avrà un tal punto per vertice , e per direttrice della sua retta generatrice l'altra curva $M'E'N'$, taglierà la terza curva $M''E''N''$ in un punto E'', il quale determinerà un lato $EE'E''$ della superficie difforme che ha per direttrice le tre curve date , e che corrisponde al punto E ; e così si determina la posizione di un lato di essa , corrispondente ad un qualunque altro punto . *Fig.* 11.

Delle tre curve MEN, $M'E'N$, $M''E''N''$ una o due , o anche tutte e tre possono divenir rette ; l'ultimo di questi casi è rimarchevole per la proprietà singolare che ha una tal superficie difforme di poter esser generata da una retta in due modi differenti . La prima genesi segue evidentemente dalla definizione , che si dà di essa superficie : la retta mobile si appoggia costantemente su di tre rette date . L' altra si deduce dalla prima ; poichè se tra tutti i lati di una tal superficie se ne prendano tre ad arbitrio , e si considerino questi tre come delle nuove direttrici ; la retta mobile potrà per generar essa superficie appoggiarsi costantemente anche su di questi .

53. *Scol.* 2. Questa nuova maniera di conside-

rare le superficie curve per mezzo delle loro generatrici, che forma il complemento del metodo delle projezioni, e della cui semplicità e fecondità, avremo spesso occasione di assicurarcene in appresso, ha dato origine al seguente metodo di projezione per le superficie curve.

La forma e la posizione di una superficie curva, non si determina dando le projezioni di tutti i punti di essa; ma sì bene, costruendo per un punto qualunque la curva generatrice di quella forma e posizione che essa deve avere passando per questo punto.

Bisogna però osservare le presenti due regole.

La prima, che potendosi ogni superficie curva intender generata in più modi differenti, come dallo Scol. prec. si rileva; bisogna che colui che opera, abbia della sagacia in iscegliere tra tutte le genesi possibili, quella che impiega la curva la più semplice, e che esige le considerazioni le meno penose.

La seconda, che siccome considerando per ciascuna superficie curva una sola genesi, si esige la conoscenza della legge del suo moto, e l'altra del cambiamento di forma della sua generatrice; è però più semplice di considerare nel tempo stesso due differenti genesi; e d'indicare per ciascun punto la costruzione delle due curve generatrici.

Si vede da ciò, che il metodo poc'anzi esposto di esprimere la forma e la posizione di una superficie curva si riduce a

Dar la maniera di costruire le projezioni orizzontali e verticali delle due generatrici diverse, che passano per un punto qualunque di questa superficie, e del quale una delle projezioni può prendersi ad arbitrio. Ciò posto.

54. *Def.* Se si concepiscano due tangenti tirate in questo punto a ciascuna delle due generatrici; il piano che passa per esse sarà il piano tangente la superficie curva in un tal punto; e questo sarà il punto del contatto.

55. *Def.* La perpendicolare al piano tangente nel punto del contatto si chiama *normale* alla superficie curva.

Essa si prende come normale all'elemento della superficie; poichè siccome ogni tangente ad una linea curva si può prendere come il prolungamento dell'archetto; così pure il piano tangente si può avere come un prolungamento convenevolmente fatto dell'elemento della superficie.

Prima di venire alla soluzione de' Probl. particolari, che forman l'oggetto di questo Capitolo darò la seguente idea generale del metodo da tenersi per determinar la posizione di un piano tangente una superficie curva.

Prop. 23. Probl. 19.

56. *Abbozzare il metodo generale per determinar la posizione di un piano tangente una superficie curva.*

Sol. Un tal metodo consiste, come dal n.° 54. apparisce in concepir tirate pel punto del contatto le tangenti rispettive alle due generatrici differenti le quali passano per un tal punto; ed a costruir poi le tracce di quel piano che passa per queste due tangenti.

57. Cor. Se una delle generatrici della superficie curva proposta è una retta, come nelle superficie cilindriche e coniche, sarà essa stessa la direttrice del piano tangente, il quale dovrà toccare perciò la superficie curva in tutta la lunghezza di questa retta.

Prop. 24. Probl. 20.

58. *Tirare un piano tangente una superficie cilindrica in un punto di essa del quale ne è data la projezione orizzontale.*

Sol. Sieno *ab*, *a'b'* le projezioni di quella retta cui è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica la quale abbia per sua traccia orizzontale la curva *pde* cioè sia questa l'altra generatrice sua; e sia finalmente il punto *c* la projezione orizzontale data del proposto. *Fig.* 16.

Si tiri per *c* la retta *cd* parallela alla *ab*; dinoterà questa la projezione orizzontale di tanti lati della superficie cilindrica in ciascun de' quali esiste un punto che ha per projezione orizzontale l'altro *c*, quanti sono gli incontri suoi *d* colla trac-

cia *pdc*, e pe' quali passano essi lati; ed altrettanti saranno pure i piani tangenti che soddisfano al Problema.

Or ciascuno di questi piani dovendo toccare la superficie cilindrica in tutta l'estenzione di quel lato corrispondente di essa che passa per uno de' punti *d*, dovrà necessariamente passare per la retta *dK'* che tocca in questo punto la traccia *pde* (n.° 56) sarà per conseguenza questa la sua traccia orizzontale, e la verticale corrispondente resterà determinata col metodo del n.° 41 sol che si determini la projezion verticale di quel suo punto che ha per projezione orizzontale il dato *c*.

A tal'oggetto si projettino i punti *d* in *D'* sulla *L'M'*, e poi si tirino per questi le *D'd'* parallela alla *A'b'*, che dinoteranno le projezioni verticali di que' lati della superficie cilindrica che passano pe' punti *d* ed in ciascun de' quali esiste un punto che ha per projezione orizzontale il dato *c*; dovran perciò in esse *D'd'* essere allogate le rispettive projezioni verticali di questi stessi punti; ma debbonsi trovare tali projezioni anche nella perpendicolare indefinita alla *L'M'* abbassatale dal punto *c* (n.° 23.). Dunque saranno esse i punti *c'* ne' quali questa incontra ciascuna *D'd'*.

PROP. 25. PROBL. 21.

59. *Tirare un piano che tocchi una superficie conica in un punto di essa del quale n'è data la projezione orizzontale.*

Sol. Ottenendosi la soluzione di questo Proble-
Fig. 17. ma con un ragionamento del tutto simile a quello del Probl. prec., non ho fatt'altro che disegnarne le diverse parti della costruzione sua nella fig. 17. colle stesse lettere della prec.; potranno così i giovani stessi cercarla facilmente per loro esercizio. Bisogna pur che essi avvertano, che passando sempre la retta generatrice di una superficie conica per un punto stesso debbano anche le projezioni orizzontali e verticali sue passare per un punto, ch'è per le prime la projezione orizzontale e per le seconde la projezion verticale del vertice della superficie conica.

PROP. 26. PROBL. 22.

60. *Tirare un piano tangente una superficie di rivoluzione intorno ad un'asse verticale, per un punto di essa del quale n'è data la projezione orizzontale.*

Sol. Sia *a* la projezione orizzontale dell'asse della
Fig. 18. superficie data, *A'a'* la verticale, *p'd'e'* la curva generatrice di essa, considerata in un piano tirato per l'asse, e c la projezione orizzontale data del

punto del contatto. Si concepisca tirato un piano per l'asse e pel punto c, avrà questo per sua traccia orizzontale la ac, ed interseghera la data superficie di rivoluzione nella sua generatrice verticale, che passa per tutti que' punti che sono in una tal superficie segnati dalla verticale tirata per c, e per ciascun de' quali le si può condurre un piano tangente, il quale sodisfi al Problema proposto. Per determinare il numero e 'l sito, cioè le projezioni verticali, di questi. Si concepisca un tal piano rivolgersi intorno all'asse, finchè divenga parallelo al verticale di projezione, cioè finchè la ac descrivendo col suo estremo c l'arco cd, venga a disporsi parallela alla $L'M'$. In questa nuova posizione che prende un tal piano, la generatrice in esso segnata avrà per projezione verticale la curva identica $p'd'e'$, ed i diversi punti di contatto da determinarsi, e che trovansi ora allogati nella verticale che parte da d, avranno per loro rispettive projezioni verticali que' punti ne' quali questa curva $p'd'e'$ viene incontrata dalla perpendicolare $dD'd'$ abbassata dal punto d sulla $L'M'$: il numero di quelli nel loro vero sito, cioè quando sono orizzontalmente projettati in c, adequerà dunque quello di questi incontri; e le loro altezze orizzontali dovendo corrispondere alle $d'D'$, dovranno le projezioni verticali di essi allo-

garsi rispettivamente nelle parallele tirate alla $L'M'$ per ciascun punto d'; ed esser perciò gli incontri c' di queste colla perpendicolare abbassata da c sulla $L'M'$.

Ciò posto, si tiri per uno de' punti d' la tangente $d'H'$ alla curva $p'd'e'$; si comprenderà facilmente, che 'l sito di questa per rispetto alla $A'a'$ ed alla $L'M'$ sia identico perfettamente a quello della retta che tocca la generatrice della superficie data, esistente nel piano tirato per ac, in quel suo punto che ha per altezza orizzontale la corrispondente $d'D'$, e che perciò questa incontrando la ac debba ascinderne la parte ah uguale alla $A'H'$. Ed essendo l'altra generatrice di una tal superficie che passa per questo stesso punto un cerchio orizzontale, e perciò normale al piano verticale che passa per ac; dovrà la retta che lo tocca in un tal punto, e quindi il piano tangente che deve passar per essa (n.° 56.), insisterne anche perpendicolarmente su di questo piano, ed avere per conseguenza la sua traccia orizzontale perpendicolare alla ac: sarà dunque questa traccia dinotata dalla perpendicolare innalzata su di una tal linea dal punto h. La corrispondente traccia verticale si determinerà come nel n.° 41.

61. *Scol.* Il metodo praticato in questi tre Probl. per determinare la projezione verticale, cioè l'altezza di un punto preso in una superficie curva data, subito che si conosce la projezione orizzontale di esso, può estendersi a qualsivoglia altra superficie, ed in appresso avremo spesso occasione di adoprarlo. I Geometri Descrittivi gli han dato il nome di *costruzione di una superficie curva*. La sua stretta unione con alcune altre ricerche che forman l'oggetto di questa scienza, tra le quali han luogo le presenti, mi han fatto risolvere di non trattarlo in un'articolo separato, temendo di non rendere più difficili le soluzioni di que' Problemi che di tal *costruzione abbisognano*.

PROP. 27. PROBL. 23.

62. *Tirare un piano tangente una superficie difforme per un punto dato in essa.*

Sol. Sieno MEN, $M'E'N'$, $M''E''N''$ le tre curve che dirigono il moto della retta mobile; Z il punto dato (1) ed $EE'E''$ la retta mobile passante per Z; finalmente sieno ET, $E'T'$, $E''T''$ le tangenti delle tre direttrici ne' punti E, E', E'' in *Fig.* 19.

(1) *La fig. di questo Probl. è in prospettiva. Se tutti i dati di essa fossero rapportati a due piani coordinati, come ne' Probl. prec., una sola pro-*

dove le incontra la retta $EE'E''$, le quali supponesi che si sappian tirare (2).

Ciò posto, si concepisca un'altra superficie difforme che abbia per direttrici queste tre tangenti, e rappresentino le rette $EE'E''$, $FF'F''$, $GG'G''$ la generatrice sua in tre diverse posizioni; è facile il comprendere, che questa e la proposta abbiano comune l'elemento $EE'E''$ nel quale si toccano, e che per conseguenza il piano che tocca l'una debba necessariamente toccare anche l'altra. Si è dunque ridotto il Problema a tirare un piano che tocchi in Z questa nuova superficie; cioè a determinare due rette intersegantisi in Z per le quali deve passare un tal piano. Or da quello che si è detto di sopra circa la genesi di questa superficie, chiaramente si rileva, che potendo essa esser generata da una retta in due modi differenti, non possono passare pel punto Z altre rette, se non le due EZE'' che poggiano sulle tre direttrici ET, $E'T'$, $E''T''$, e l'altra ZYX che si appoggia sulle

---

jezione del punto Z sarebbe stata sufficiente a determinarlo praticando lo stesso artifizio che in quelli.

(2) *Fra 'l seguente Capitolo si vedrà in qual modo possasi tirare la tangente alle curve, quando esse risultano dall'intersezioni di due superficie curve conosciute; o date nel modo indicato nel n.° 53.*

altre tre $EE'E''$, $FF'F'$, $GG'G''$. Dunque il piano che passa per le due rette EZE'', ZYX è il piano tangente in Z questa superficie, e quindi anche la proposta.

63. *Scol.* 1. Dalla costruzione di questo Probl. facilmente si rileva che un piano tangente una superficie difforme non tocca che in un sol punto della retta che loro è comune, e che per ogni altro di questa, esso è secante.

64. *Scol.* 2. Se invertendo questo Probl. si proponese a = *Determinare il punto del contatto di una superficie difforme con un piano tangente dato*. La soluzione si otterrebbe facilmente da ciò che si è detto. In fatti, sia EE' l'elemento di una tal superficie pel quale deve passare il piano tangente dato. Si prolunghi un tal piano fino ad incontrarne le rette FF'', GG'', e sieno Y, X i punti ne' quali le incontra; la retta YX prodotta incontrerà l'elemento EE'' in un punto Z, che sarà il cercato.

SCOLIO GENERALE.

65. I Problemi recati, sono sufficienti a soddisfare all'oggetto di questa prima Parte; poichè essi comprendono le tre diverse specie di superficie curve delle quali ne avevamo già definita la genesi.

PROP. 28. PROBL. 24.

66. *Tirare per un punto di una superficie curva del quale n'è data la sola projezione orizzontale una retta normale ad essa.*

Sol. Trovata la projezion verticale di esso punto, si determinino le tracce del piano tangente la superficie proposta in un tal punto; saranno projezioni della normale cercata le perpendicolari che per le projezioni date di esso punto si abbassano sulle tracce di questo piano tangente (n. 55. 36.)

CAPITOLO III.

PARTE II.

De' Piani tangenti le superficie curve, tirateli per de' punti dati fuori di esse.

67. Per restar determinata la projezione di un piano, bisogna che esso soddisfi a tre condizioni differenti, ciascuna delle quali equivalga a quella di passare per un punto dato. Or ne' Problemi che forman la prima parte di questo Capitolo, la condizione di tirare un piano tangente una superficie curva per un punto di essa equivaleva come dicemmo (n.° 54.) all'altra di far passar un tal piano per le tangenti delle due generatrici di essa superficie che passano per questo punto; condizione che evidentemente corrisponde alle tre che

in generale si esigono: ond'è che sola era sufficiente a determinare la posizione del piano tangente. Ma se si dovesse questa determinare per alcune condizioni date nello spazio; in un tal caso ognun vede bene, che debban queste esser tante, che aggiunte a quelle che ne dà la natura del contatto della superficie curva con un piano, le assoggettino sempre alla legge di passare per tre punti; in modo tale, che se la superficie sia suscettibile di esser toccata in un punto solo, debbano esser date nello spazio delle condizioni valevoli ad obbligarlo a passare per due altri punti. E se la superficie proposta sia suscettibile di esser toccata da un piano in tutta la lunghezza di una linea retta, cioè che abbia una retta per una delle sue generatrici, com'è per l'appunto una superficie cilindrica o conica; equivalendo un tal contatto a due delle condizioni cercate, non se ne esigerà nello spazio più che una, cioè quella di farlo passare per un punto dato.

Tali considerazioni ci debbono servir di guida a conoscere quali de' Problemi che forman l'oggetto di questa seconda parte sieno determinati, quali altri indeterminati, e quali in fine mal proposti.

PROP. 29. PROBL. 25.

68. *Tirare per un punto dato un piano che tocchi una data superficie cilindrica.*

Sol. Rappresenti *pde* la traccia orizzontale della *Fig.* 20. data superficie cilindrica, e sieno *ab*, *A'b'* le projezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice di essa superficie. Ciò posto, si tirino per le projezioni *c*, *c'* del punto dato le rette *cf*, *c'F'* rispettivamente parallele alle *ab*, *A'b'*, saran queste le projezioni di una retta che dal punto dato si tira parallela alla generatrice della superficie cilindrica, e che deve esistere nel piano dimandato (n.° 18.). Se dunque si determini il punto *f* ove una tal retta incontra il piano orizzontale, sarà questo un punto della traccia orizzontale di esso piano; ed è chiaro perciò, che se per *f* si tirino alle curve *pde* tutte le tangenti possibili *fd*, sien queste le rispettive traccie orizzontali di altrettanti piani tangenti che soddisfano al Problema.

Le corrispondenti traccie verticali di essi piani si potran determinare col metodo del n.° 41.

Volendo di più esibire quelle generatrici che rappresentano le varie rette di contatto; è manifesto, che sieno projezioni orizzontali di queste le parallele alla *ab* tiratele pe' punti *d*, e che projettando questi in *D'*, le parallele *D'd'* alla *A'b'* ne

dinotino le corrispondenti projezioni verticali delle stesse.

PROP. 30. PROBL. 26.

69. *Tirare per un punto dato un piano che tocchi una data superficie conica.*

Sol. La sol. di questo Problema, differendosi per poco dalla prec. non farò altro che indicarla semplicemente in astratto; sarà facile però il rapportarla alla fig. 21. ove ho a tal'oggetto segnati i dati e le parti della costruzione colle stesse lettere della fig. del prec. Probl. *Fig.* 21

Si determini il punto ove la congiungente il vertice della superficie conica col punto dato, incontra il piano orizzontale; dovendo una tal congiungente esistere nel piano da tirarsi, dovrà questo suo punto esser uno di quelli della traccia orizzontale di esso piano; e questa verrà per conseguenza espressa da una di quelle tangenti che per un tal punto possonsi tirare alla traccia orizzontale della superficie data.

PROP. 31. PROBL. 27.

70. *Tirare per una retta data un piano che tocchi una data superficie sferica.*

Sol. Prendasi per piano di projezione orizzontale un piano al quale sia perpendicolare in *f* la retta data che avrà per conseguenza per sua projezione *Fig.* 22.

verticale la perpendicolare indefinita $F'f'$ abbassata dal punto f sulle $L'M'$. Sia inoltre a la projezione orizzontale del centro della sfera, a' la verticale, e 'l cerchio pde la projezione orizzontale dell' istessa; ne dinoterà anche un tal cerchio la traccia orizzontale di una superficie cilidrica verticale circoscritta alla sfera data; e'l piano tangente dimandato sarà com'è chiaro un di que' due $dK'k'$ che per un punto qualunque della retta data si tira tangente questa superficie cilindrica (n.° 68).

PROP. 32. PROBL. 28.

71. *Tirare per un punto dato un piano che tocchi due superficie sferiche date.*

Sol. Dinotino i punti a, a', le rispettive proje-
Fig. 23. zioni de' centri di una di esse sfere, b, b' quelle del centro, dell'altra, e c, c' quelle del punto dato. Ciò posto, si tirino a' due cerchi pde, gqh, che rappresentano le projezioni orizzontali delle due sfere, le due tangenti comuni dq, dq rappresenteranno esse le projezioni della generatrice di una superficie conica circoscritta alle due sfere ne' due limiti suoi per rapporto al piano di projezione orizzontale, e 'l punto K della ab prodotta ove queste si uniranno, dinoterà la projezion verticale di quel punto della congiungente i centri di esse sfere ch'è il vertice di essa superficie conica; quindi se si projetti K sulla $a'b'$ in K' sarà K' la pro-

jezion verticale del vertice di una tal superficie conica, e congiunte le cK, $c'K'$ queste ne dinoteranno le projezioni di quella retta che unisce il punto dato col vertice stesso.

Or il piano tangente cercato deve riposarsi com' è evidente su di questa superficie conica, e quindi passare per una tal congiungente. Dunque il proposto Problema si riduce a tirare un piano che tocchi una delle superficie sferiche date, e che passi per la retta che unisce il punto dato col vertice del cono circoscritto ad esse, il quale è già sciolto (n.° prec.)

72. *Scol.* Essendo due in diversa posizione le tangenti comuni de' due cerchi *pde*, *gqh*, una che gli tocca da un lato stesso, e che perciò incontra la congiungente de' centri prodotta, l'altra che gli tocca in due lati opposti, e che quindi incontra essa congiungente tra i centri stessi, ne segue che anche due diverse sieno le superficie coniche circoscritte a due sfere, una che le inviluppa in una sola superficie, l'altra che le chiude in due opposte; e siccome a ciascuna di queste possonsi tirare due piani tangenti; saranno perciò quattro i piani tangenti due sfere che passano per un punto dato, due de' quali toccano le sfere da un lato stesso e gli altri due in lati opposti.

Il Probl. di tirar la tangente comune a due cerchi dati di magnitudine e di sito del quale fa d'uo-

po avvalersi come lemma nel proposto, è un Probl. elementare; ma siccome esso non è facile ad incontrarsi nelle ordinarie istruzioni di questo ramo di Geometria, ho stimato bene di quì recarne la seguente soluzione, che sembrami la più elegante, e perchè la più semplice e facile nella costruzione, e perchè comprende tutt' una volta i due casi, cioè quello della tangente i cerchi alla stessa parte, e l'altro della tangente a parti opposte.

Sol. Si cerchi nella retta *ab* che unisce i centri di essi cerchi, tra i punti *a*, *b*, o al di là del punto *b*, centro del cerchio minore, un punto *K* tale che stia *aK* : *Kb* :: *ad* : *bq*, e poi tirisi per esso punto *K* la tangente ad uno di questi cerchi, come al cerchio del centro *b* una tal retta dovrà toccare anche l'altro.

Dim. Poichè essendo per costruzione *Ka* : *Kb* :: *ad* : *bq*, la tangente *Kq* prodotta deve necessariamente incontrare l'altro cerchio in un punto *d*; e per la similitudine de' triangoli *Kbq*, *Kad*, dovrà esser retto l'angolo in *d* al par dell'altro in *q*. Dunque la *Kd* tocca anche il cerchio del centro *a* in *d*.

Cor. Quindi la tangente comune a due cerchi divide la congiungente i loro centri nella ragion de' raggi degli stessi.

PROP. 33. PROBL. 29.

73. *Tirare un piano tangente tre superficie sferiche date.*

Sol. Concepiscasi tirato il piano tangente dimandato alle tre sfere, ed immaginisi primieramente una superficie conica circoscritta alle due prime di esse, e che tocchi entrambe; il piano tangente toccherà questa superficie conica lungo una delle sue rette generatrici, e passerà pel suo vertice (n.° 57.). Se s'immagini una seconda superficie conica circoscritta alla prima sfera ed alla terza, lo stesso piano tangente la toccherà anche lungo una delle sue rette generatrici e passerà per conseguenza pel suo vertice. Finalmente se si concepisca una terza superficie conica che abbraccia e tocchi la seconda e la terza sfera, il piano tangente proposto toccherà anche questa lungo una delle sue generatrici e passerà sul suo vertice. Dunque i vertici di queste tre superficie coniche esistono nel piano tangente; ma essi debbono anche esistere nel piano che passa pe' centri delle tre sfere, e che contiene i tre assi; quindi essi saranno nell'intersezione di questi due piani e perciò in una retta. Se dunque si costruiscano, come l'abbiamo indicato nel Probl. prec. le projezioni orizzontali e verticali di questi vertici de' quali bastano due soli, le rette che congiungono le loro rispettive projezioni *Fig.* 24.

saranno le corrispondenti projezioni di quella retta che unisce i vertici stessi e che esiste nel piano tangente da tirarsi. Il Probl. dunque si riduce come il prec. a tirare per questa retta data un piano che tocchi una di esse sfere, un tal piano toccherà anche le altre due; e sarà il cercato.

74. *Scol.* Potendosi come nel n.° 72 abbiam detto concepire due superficie coniche che involgano e tocchino due sfere, una che abbia il vertice nella congiunte de' centri prodotta e l'altra in questa tra i centri delle sfere; è chiaro, che nel Probl. proposto vi saranno sei superficie coniche circoscritte alle tre sfere delle quali tre saranno circoscritte al di fuori di esse, come son quelle che hanno per projezioni orizzontali de' loro vertici i punti d, e, f e tre altre avranno i loro vertici tra le sfere stesse, tali sono quelle che han per projezioni orizzontali i punti g, k, h. I vertici di questi sei coni saranno distribuiti tre a tre in una stessa retta, vale a dire i tre f, e, d, nella fd, gli altri tre f, k, g, nella fg, i tre d, g, h nella dh, e finalmente i tre ultimi e, k, h nella eh; dunque ciascuna di queste tre rette potrà indistintamente esser la direttrice del piano tangente le tre sfere, e siccome per ciascuna di esse rette ad una delle tre superficie sferiche possonsi tirare due piani tangenti (n.° 70) i quali debbono toccare anche le altre due. Soddisferanno dunque a questo Problema otto piani

diversi, de' quali que' due che passano per la *df* toccheranno le tre sfere da un lato stesso per rapporto ad essi, e gli altri sei che due a due hanno per direttrice ciascuna delle altre tre rette, toccheranno sempre due delle tre sfere da un lato e la terza dall'opposto.

75. *Cor.* E' facile dal presente Probl. il dedurne che *Se si tirino a tre cerchi dati di grandezza e posizione, considerandoli a due a due le tangenti comuni; i tre punti ove queste concorrono colle rispettive congiungenti de' loro centri, esistono sempre in una retta* (1).

---

(1) *Il valentissimo Analista la* Croix *nella prima edizione della sua Geometria Descrittiva, dà l'enunciata verità geometrica come* forse non facile a dimostrarsi a priori: *senza entrare a discutere i motivi che lo hanno indotto in questa opinione, ecco in qual modo essa verità può dimostrarsi.*

Si tiri per c, centro di uno de' tre cerchi, la retta cl parallela alla congiungente i centri b, a degli altri due, ed una tal parallela si produca fino ad incontrare in l la retta fd che unisce i punti di concorso f, d delle tangenti comuni a' cerchi a,b; b c: sia in fine e il concorso delle tangenti comuni a' cerchi a, c; dico che un tal punto deve trovarsi allogato nella fd.

S'indichino con R, R', R'' i raggi de' tre cerchi

PROP. 34. PROBL. 30.

76. *Tirare per una retta di sito un piano il quale tocchi una data superficie di rivoluzione.*

Sol. Prendasi il piano di projezione orizzontale in modo, che sia ad esso perpendicolare in *d* la la retta di sito; e sia il piano verticale parallelo all'asse della superficie data; supporrò per maggior brevità che esso passi per l'asse stesso, del quale ne dinoti la retta $C'a'$ la projezione verticale indefinita o ch'è lo stesso la sua posizione nello spazio. Sia di più $a'e'b'$ la generatrice di essa superficie segnata sul piano di projezione verticale. Ciò posto, s'intenda rivolgersi una tal curva intorno al suo asse $b'a'$, finchè giunga in un sito $a'Eb'$ tale, che il piano nel quale essa ne giace sia perpendicolare a quello di projezione verticale; un tal piano incontrerà la retta data in un punto *D*, che avrà, com'è chiaro, per sua projezione orizzontale l'altro *d*, e per projezione verticale il il punto d' dove s'incontrano la $D'd'$ projezione verticale della retta data, colla $C'a'$ traccia verti-

Fig. 26.

---

a, b, c. E perchè deve stare R : R' : : af : fb (Cor. not. prec.), ed R' : R'' : : bd : dc; cioè : : bf : cl, sarà ex aequo *R : R'' : : af : cl. Ma è poi R : R'' : : ae : ec. Dunque starà af : cl : : ae : ec; e quindi il punto e dovrà trovarsi allogato nella fd.*

cale di esso piano: e sarà di più la traccia orizzontale del medesimo la perpendicolare $C'h$ alla $L'M'$ elevatale dal punto C'

Or se concepiscasi tirata pel punto D una tangente DE alla curva $a'Eb'$; è chiaro, che essendo l'altra generatrice della superficie proposta, che passa pel punto del contatto E, un cerchio perpendicolare al piano $hC'd'$; debba perciò la tangente di questa generatrice in esso punto E esser perpendicolare allo stesso piano $hC'd'$ e quindi parallela all'altro di projezione verticale. Dunque esistono in un solo piano questa tangente e la retta di sito Dd; e dovendo in questo piano trovarsi anche la tangente DE, sarà esso il piano tangente cercato (n.° 54.); e la sua traccia orizzontale sarà quella retta che passa per d e per quell'altro punto in dove la tangente DE incontra il piano orizzontale.

Per determinare un tal punto, basta riflettere, che siccome non variasi la posizione della tangente DE per rapporto alla curva $a'Eb'$ ed al suo esse $a'b'$, quando il piano di questa si abbatte sul verticale; se s'innalzi dal punto d' sulla $d'C'$ la perpendicolare $d'D''$ uguale alla $d'D$, e quindi alla dD' e poi si tiri per D'' alla curva $a'e'b'$ la tangente $D''e'f'$, questa ne rappresenterà la tangente alla curva $a'Eb'$ che passa per D, quando il piano di essa si abbatte su quello di projezione verticale e 'l punto f' ove

essa tangente incontra la retta $C'h'$, ch'esprime la $C'h$ abbattuta, ne darà la distanza di quel punto in dove la tangente DE incontra il piano orizzontale, dall'altro C'; cioè il punto cercato.

Se dunque si ascinda $C'f$ uguale a $C'f'$; congiunta la $d'fF'$, sarà questa la traccia orizzontale del piano tangente dimandato; e la verticale si determinerà come nel n.° 41.

CAP. IV.

Delle Intersezioni delle superficie curve.

77. Data la forma e la posizione della generatrice di una superficie curva, questa non ha niente più di arbitrario; essa è costruibile (n.° 61) ed il suo sito è affatto determinato nello spazio. Or se due superficie così precisamente definite hanno alcuni punti di comune; i terminanti la posizione di tutti questi punti e della linea ch'essi compongono, saranno la forma e la posizione rispettiva di esse due superficie; dovendo una tal linea in generale partecipare delle curvature delle due superficie nelle quali esiste nel tempo stesso, essendone essa la comune sezione, dovrà perciò esistere in differenti piani, ed esser quindi una di quelle curve che diconsi per tal motivo *a doppia curvatura*. Ciò però non esclude ch'essa possa in alcuni casi divenire una curva piana, in altri più

particolari anche una retta ; e finalmente in altri particolarissimi un punto.

78. Prima di passar oltre, è questo il luogo di fare un parallelo tra le operazioni dell'analisi ed i metodi della Geometria Descrittiva: l'idea che di una tal corrispondenza dà il Sig. Monge essendo precisissima e veramente degna di un Geometra, che conosce e sa valutare i rapporti di queste due scienze io la recherò quì senza niente mutarci.

Nell'Algebra, quando un Problema è posto in equazioni, e che il numero di queste pareggia quello delle incognite, è sempre possibile d'ottenere lo stesso numero di equazioni in ciascuna delle quali non v'entri che una delle incognite. L'operazione per mezzo della quale si perviene a far ciò, e che chiamasi *eliminazione*, consiste in determinare per mezzo di una di esse equazioni una delle incognite da tutte le altre: cavando così successivamente le differenti incognite, si perviene ad un'equazione finale, che non ne contiene più che una sola della quale deve essa dare il valore.

L'oggetto dell'eliminazione nell'algebra, ha la più grande analogia colle operazioni, per mezzo delle quali nella Geometria Descrittiva si determinano le intersezioni delle superficie curve.

In fatti supponiamo che considerando un punto nello spazio, e rappresentando per x, y, z, le distanze di questo punto da tre piani ortogonali tra

loro, si stabilisca un'equazione tra queste tre distanze, la quale sia espressa da un'equazione in x, y, z e costanti. In virtù di questa relazione, la posizione del punto non resterà determinata: poichè le quantità x, y, z possono mutar valore, e per conseguenza il punto mutar di sito nello spazio, senza che cessi di aver luogo la condizione, che una tal'equazione ne esprime; e la superficie curva, che passa per tutte le posizioni che il punto può così occupare, senza che si alteri il rapporto tra queste tre coordinate, è il luogo geometrico di essa equazione.

Supponiamo; per esempio, che una sfera il cui raggio sia espresso da A abbia il suo centro nel punto d'intersezione comune de' tre piani ortogonali; e che considerando un certo punto nella superficie della sfera, s'immaginino delle perpendicolari abbassate da esso su di questi tre piani e rappresentate dalle lettere x, y, z; è evidente che il raggio della sfera diretto al punto che si considera, sarà la diagonale di un parallelepipedo rettagolo, i di cui tre lati saranno x, y, z; che il suo quadrato sarà uguale alla somma de' quadrati di essi tre lati; e che così si avrà l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Ciò posto, se il punto cambia posizione sulla superficie sferica, le sue distanze x, y, z da' tre piani ortogonali, cambieranno; ma la sua distanza dal centro non cambierà, e la somma de' qua-

drati delle sue tre coordinate, ch'è sempre uguale al quadrato del raggio conserverà costantemente un valore stesso; sarà dunque anche il rapporto tra le coordinate di questo punto espresso dall'equazione. $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$

Quest'equazione la quale ha luogo per tutti i punti della superficie sferica, e che ha luogo per questi solamente, e l'equazione ad una tal superficie. Tutte le superficie curve hanno così ciascuna la loro equazione; e se non è sempre facile di aver questa equazione espressa in quantità tanto semplici, quanto la distanza x,y,z; e però sempre possibile di ottenerla in quantità più complicate, tali; come le inclinazioni de' piani tangenti, i raggi di curvatura: basta pel nostro oggetto di averne dato l'esempio di una.

Adesso, se avendo in x,y,z le equazioni di due superficie curve differenti, e supponendo che pe' punti delle stesse superficie, sien prese le distanze dagli stessi piani, si elimini una delle tre quantità x,y,z, per esempio z, tra le due equazioni; atteso la simultaneità di queste due equazioni, si stabilisce primieramente, che non si tratta indistintamente di tutti i punti della prima superficie, nè di tutti quelli dell'altra, ma solamente di quelli dell'intersezione loro, per ciascun de' quali debbono aver luogo le due equazioni, poichè questi esistono nel tempo stesso sulle due superficie. In seguito

l'equazione in x,y che risulta dall'eliminazione di z, esprime il rapporto, che ha luogo tra queste due distanze per tutti i punti dell'intersezione; qualunque sia la distanza z ch'è svanita, e della quale non più trattasi nell'equazione, essa è dunque l'equazione della projezione dell'intersezione delle due superficie sul piano perpendicolare alle z. Si vede dunque che nell'algebra, l'oggetto dell'eliminazione tra più equazioni a tre incognite, è di determinare su i tre piani a' quali è rapportato tutto lo spazio, le projezioni delle intersezioni delle superficie alle quali le equazioni appartengonsi.

La corrispondenza tra le operazioni dell'analisi ed i metodi della Geometria Descrittiva, non si limita a quello che noi abbiamo rapportato; essa esiste per tutto. Se nello spazio si fan muovere de' punti, delle linee, delle superficie per operare delle genesi qualunque, posson sempre questi movimenti esser dettati da operazioni analitiche, e gli oggetti nuovi a' quali essi dan luogo, sono espressi da' risultati stessi delle operazioni. Reciprocamente non v'è veruna operazione di analisi in tre dimensioni, che non sia la scrittura di un moto operato nello spazio e dettato da essa. Per imparar le Matematiche nella maniera più vantaggiosa, bisogna dunque che l'allievo si avvezzi di buon'ora a sentire la corrispondenza, che hanno tra loro le operazioni dell'analisi, e quelle della Geometria;

bisogna che esso si metta in istato di poter da una parte scrivere in analisi tutti i moti, che può concepir nello spazio; e dall'altra di rappresentarsi perpetuamente nello spazio lo spettacolo movente del quale n'è la scrittura ciascuna delle operazioni analitiche. Ritorniamo adesso al nostro oggetto.

79. *Def. Costruire l'intersezione* di due superficie curve date, è lo stesso che rappresentarne su de' piani coordinati le projezioni di tutti i punti di esse.

80. Costruita che si è l'intersezione di due superficie curve, la loro forma e posizione rispettiva, che sono, come abbiam detto, i determinanti di una tale intersezione, sono anché i determinanti della tangente di questa in un suo punto qualunque, e del piano normale suo, cioè di quel piano che taglia la curva ad angolo retto, e ch'è per conseguenza perpendicolare alla tangente di una tal curva nel punto del contatto ov'esso l'incontra.

Or sebbene di queste due indagini la seconda non meriti affatto di essere trascurata, avendo spesso occasione i Geometri Descrittivi di considerare i piani normali alle curve a doppia curvatura; purtuttavia noi non tratteremo che della sola maniera di costruire le projezioni delle tangenti le intersezioni delle superficie curve in punti dati; poichè essendo il piano normale ad una curva perpendicolare come si è detto anche alla tangente corr-

spondente di questa nel punto del contatto; altro non si esige per costruirlo che di tirar questa tangente, e poi determinare le tracce di quel piano, che gli è perpendicolare nel punto del contatto; Probl. già sciolto nel n.° 38.

PROP. 35. PROBL. 31. *Generale*

81. *Conosciute le genesi di due superficie curve, ed i determinanti di esse genesi essendo anche conosciuti e rapportati a' piani di projezione: abbozzare il metodo generale onde costruire le projezioni della curva a doppia curvatura nella quale le due superficie si segano.*

Sol. Concepiscansi esse superficie segate da una serie di piani, i quali serbino tutti nello spazio una stessa posizione determinata, sieno, per esempio, tutti orizzontali; segneranno questi nelle superficie proposte delle curve sempre costruibili, quando si conosce la loro genesi, essendo ognuna di queste quella serie di punti ne' quali il piano proposto incontra la generatrice corrispondente in tutte le sue posizioni. Ed essendo tali curve piane ed orizzontali, le loro projezioni orizzontali saranno, com'è facile comprenderlo, delle altre curve uguali, simmili e similmente poste ad esse; quindi sarà possibile ed agevole il costruirle; e le projezioni verticali saranno quelle rette parallele alla comune sezione de' piani di projezione nelle quali il piano

verticale è incontrato da ciascuna de' piani seganti.

Ciò posto; se le due projezioni orizzontali delle curve segnate nelle due superficie proposte da uno stesso piano non s'intersegano, sarà questa una prova, che all'altezza di un tal piano tali superficie non s'incontrano; che se al contrario esse curve s'intersegano, il numero de' loro punti d'intersezione, sarà quanto il numero di quelli che han di comune le due superficie date all'altezza di un tal piano, e de' quali essi ne dinotano le projezioni orizzontali.

Or dovendo, com'è di per se chiaro, le corrispondenti projezioni verticali di questi punti dell'intersezione dimandata allogarsi nella projezion verticale del piano segante cioè nella sua traccia verticale saranno essi dinotati dà que' punti ne' quali una tal traccia viene incontrata dalle perpendicolari indefinite alla $L'M'$ abbassatele dalle corrispondenti projezioni orizzontali di già determinate.

E praticando questo stesso artifizio per più piani seganti, si verrà a determinare sul piano orizzontale una serie di punti, ed un'altra sul verticale di projezione; e sarà la curva, o i rami di curve che passano pe' primi la projezione orizzontale, e quelli che passano per gli altri la verticale, dell'intersezione da costruirsi.

82. Il metodo in questo Problema esposto, seb-

bene generale ed applicabile per conseguenza ad ogni quistione di questa specie, ha però bisogno della prudenza del Geometra Descrittivo per essere vantaggiosamente applicato; poichè, esigendosi per determinare ciascun punto dell'intersezione di due superficie, di costruire quasi sempre due curve sarà tanto più semplice ed elegante la costruzione dell'intersezione loro, quanto più facile è quella di queste linee, le quali in molti casi, quando si scelgano di una convenevol posizione i piani seganti, non sono che rette e cerchi, e quindi capaci ad essere esibite con un moto facile e continuo. Bisogna dunque che il Geometra Descrittivo mediti bene sulla genesi delle superficie delle quali se ne vuol determinare l'intersezione, e sulla scelta de' piani seganti, affinchè la soluzione riesca la più elegante e di più facile esecuzione che si può; ed alcune volte bisognerà anche per ottenerla tale, rinunziare al sistema de' piani seganti, ed impiegare delle superficie curve le cui intersezioni colle proposte sieno più facili a determinarsi che quelle de' piani.

Gli esempj particolari che quì appresso proporremo, rischiariranno ciò, che nel precedente Probl. ed in questo Scol., per la generalità colla quale l'ho espresso, ha potuto forse sembrar duro e complicato, ed addestreranno i giovani a saper con vantaggio e convenevolmente applicare il metodo generale in altri casi affini.

PROP. 36. PROBL. 32. *Generale*.

83. *Per un punto preso ad arbitrio nell'intersezione di due superficie curve; tirare una tangente ad essa intersezione.*

Sol. Si tiri a ciascuna delle superficie interseganti si un piano tangente nel punto preso nell'intersezione loro, e ch'è perciò ad esse comune: questi due piani toccheranno anche l'intersezione in un tal punto, e dovrà per conseguenza in ciascun di essi esistere la tangente cercata. Dunque una tal retta sarà la comune sezione di essi due piani; e saranno sue projezioni su ciascuno de' piani di projezione le rette che congiungono la rispettiva projezione data dal punto preso nell'intersezione, colla corrispondente traccia dell'intersezione de' piani tangenti.

84. *Scol.* Questo Probl. dà luogo al Teor. seguente, ch'è di un grandissimo uso nella Geometria Descrittiva; abbreviando esso in molti casi il metodo nel precedente Problema proposto, ed offrendo in molti altri un mezzo, col quale costruita l'intersezione, si possa tirar la tangente ad un punto delle projezioni sue.

PROP. 37. TEOR. 5.

85. *La projezione della tangente di una qualunque curva esistente nello spazio; tocca anch'essa la projezione corrispondente di una tal curva in un punto, ch'è la projezione del contatto nella curva stessa.*

Dim. Imp. se da' punti della curva s'intendano su di uno de' piani di projezione, per esempio, l'orizzontale, abbassate delle perpendicolari: queste rappresenteranno una superficie cilindrica verticale; tagliata dal piano orizzontale nella projezione della curva che si considera.

Or il piano che projetta la tangente di una tal curva, toccando essa superficie cilindrica in tutta la lunghezza di quella generatrice, che passa pel punto del contatto; la projezione di una tal tangente, ch'è la traccia orizzontale di esso piano, dovrà anche toccare la projezione corrispondente della curva in quel punto ch'è la projezione del contatto nella curva stessa.

PROP. 38. PROBL. 33.

86. *Costruire l'intersezione di una data superficie cilindrica con un piano di sito.*

Sol. Scelgansi i piani di projezione in modo, che *Fig.* 26. sia l'orizzontale perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica, e 'l piano segante normale all' altro di projezion verticale. Sia *chek* la traccia

orizzontale di una tal superficie, e quindi la projezione sua, e con ciò quella dell'intersezione cercata: e dinotino $F'f$ la traccia orizzontale del piano segante, $F'f'$ la verticale, che sarà anche la projezione verticale di esso piano, e per conseguenza quella dell'intersezione da costruirsi. E' evidente che se tirinsi alla curva *chek* le tangenti indefinite $cC'c'$, $eE'e'$ perpendicolari alla $L'M'$ sieno le rette $C'c'$; $E'e'$ le projezioni verticali della generatrice della superficie proposta nelle sue posizioni estreme per rapporto al piano verticale; e quindi che i punti c', e', ne' quali esse tagliano la retta $F'f'$ sieno i termini della projezione verticale dell'intersezione dimandata.

Or se vogliasi tirare una tangente per un punto preso arbitrariamente in essa intersezione, (un tal punto avrà per projezione orizzontale un qualsivoglia punto h preso nella curva *chek*, e la projezion verticale si avrà, projettando il punto h in i' sulla $F'f'$) dovendo questa tangente esistere nel piano segante, la sua projezion verticale caderà nella $F'f'$, e l'altra orizzontale sarà la retta hl che tocca in h la curva *chek* (n.° 85). Si è dunque tutto determinato per rispetto all'intersezione dimandata.

87. *Scol.* Se bisognasse costruire una tale intersezione tal quale esiste nel piano segante, e poi tirarle per un suo punto una tangente,

Si concepiscano per tanti punti *h* presi arbitrariamente sulla curva *chek* passar de' piani normali à due di projezione, de' quali se ne avranno le tracce orizzontali e verticali che sono anche le loro projezioni su questi stessi piani, abbassando dà essi punti *h* le perpendicolari indefinite $hkT'i'$ sulla $L'M'$; incontrerà ciascuno di questi piani il piano segante $fF'f'$ in una retta che sarà perpendicolare alla $F'f'$ nel punto i' dove questa è tagliata dalla $T'i'$; ed avrà una tal perpendicolare alla $F'f'$ per sua projezione verticale esso punto i' (n.° 16) e per orizzontale la retta $T'kh$, alla quale essendo essa parallela, dovranno le parti sue intercette tra'l punto i' e gli altri ov'essa incontra la curva d'intersezione, e che son projettati sul piano orizzontale in h' k pareggiarne le loro corrispondenti projezioni $T'k$, $T'h$ (n.° 16).

Or supponendo che il piano segante si rivolga intorno alla sua traccia verticale $F'f'$ per abbattersi sul piano di projezion verticale; le ordinate $i'K$, $i'H$ alla curva d'intersezione, non debbono cambiare affatto, ne la loro grandezza, ne il loro sito per rispetto alla $F'f'$ se dunque da tutti i punti i' si elevino sulla $F'f'$ nel piano verticale le perpendicolari $i'KH$, e poi si ascindano su ciascuna di esse dal punto i' le $i'K$, $i'H$, eguali rispettivamente alla $T'K$, $T'h$; tutti i punti H, K rappresenteranno la curva d'intersezione tal quale esi-

ste nel piano segante e sulla superficie cilindrica.

Costruita che s'è una tal curva volendole tirare una tangente per un suo punto *H*. Si abbassi da un tal punto sulla *F'f'* la perpendicolare *Hi'*, e poi projettisi *i'* in *h* sulla curva *chek*; saranno *i'*, *h* le projezioni rispettive del punto *H* preso nell' intersezione.

Or la tangente cercata, avendo per projezione orizzontale la retta *hl* che tocca in *h* la curva *chek* e la sua projezion verticale nella *F'f'*; se la *lh* si produca fino alla *L'M'*, e da un tal suo incontro *G'* si elevi ad essa *L'M'* la perpendicolare *G'g'*, il punto *g'* ove questa sega la *F'f'* sarà quell'istesso in dove la tangente cercata incontra il piano di projezion verticale (n.° 26) e siccome non variasi l'incontro di essa tangente colla *F'f'* quando il piano segante si abbatte; la retta *Hg'* dinoterà una tale tangente.

88. *Scol.* 2. Se il piano di projezion verticale fosse a grandissima distanza dalla curva *chek*, si potrà concepire un'altro piano parallelo ad esso è più prossimo ad una tal curva, o anche tale, che colla sua traccia orizzontale la seghi, ed eseguir poi per rapporto a questo la costruzione dello Scol. prec.

PROP. 39. PROBL. 34.

89. *Costruire l'intersezione di una data superficie conica con un piano di sito.*

Sol. Suppongasi il piano di sito cadere perpendicolarmente su di quello di projezion verticale, e siane $F'f'$ la traccia orizzontale, $F'f'$ la verticale, che sarà anche la projezion verticale di esso piano e quindi quella dell'intersezione dimandata. Sieno di più a, a' le projezioni del vertice a della superficie conica, pqp la traccia orizzontale di essa; è manifesto che tirando ad una tal curva le due tangenti pP', qQ' perpendicolari alla $L'M'$, e congiunti poi i punti P', Q' coll'altro a', sieno le congiungenti $P'a'$, $Q'a'$ le projezioni verticali della generatrice della superficie conica ne' limiti suoi p, q per rispetto al piano verticale, ed è anche evidente che i punti c', e' ne' quali queste projezioni incontrano la $F'f'$, sieno i limiti della projezion verticale $c'e'$ dell'intersezione dimandata.

Fig. 27.

Or se per l'altezza, orizzontale Aa del vertico della superficie conica, s'intenda passare una serie di piani: ciascun di questi la segherà in due sue generatrici, le quali incontreranno la curva pqp in que' punti stessi p, q ne' quali è questa tagliata dalla traccia orizzontale paq di un tal piano segante; le projezioni orizzontali di queste generatrici caderanno nella pq stessa; e le verticali corrispon-

denti si otterranno, come poc'anzi projettando i punti p, q sul piano verticale $m\ P'\ Q'$ e congiungendo poi la $P'\ a'$, $Q'\ a'$. Finalmente è chiaro che projettando i punti i' ne' quali le $P'\ a'$, $Q'\ a'$ incontrano la $c'\ e'$, e che ne dinotano le projezioni verticali di que' punti ne' quali esse generatrici incontrano la curva d'intersezione dimandata in h, k sulla corrispondente $p\ q$, sieno questi le corrispondenti projezioni orizzontali degli stessi punti dell'intersezione da costruirsi. Quindi ne rappresenterà la projezione orizzontale di essa la curva che passa per tutti i punti h, k così determinati.

Volendo per un suo punto il quale abbia per projezione orizzontale il dato h tirarle una tangente. Già si sa che una tal tangente esistendo nel piano segante dato deve esser projettata verticalmente nella $F'f'$; ed incontrarne il piano orizzontale in un punto della traccia orizzontale $F'f$ dello stesso: altronde, una tal tangente dovendo anche trovarsi nel piano tangente nel punto proposto la superficie conica data, deve incontrare il piano orizzontale nella traccia orizzontale di questo piano tangente, la qual'è la retta $p\ l$, che tocca in p, punto per ove passa la generatrice della superficie conica passante pel punto proposto, della curva $p\ q\ p$. Sarà dunque l quel punto della Ff in dove la tangente cercata incontra il piano orizzontale; quindi

la sua projezione su di quest' istesso piano sarà la *l h* (n.° 85).

90. *Scol.* Rappresentandosi dalle linee che projettano l'intersezione costruita sul piano orizzontale una superficie cilindrica verticale, la cui traccia su questo piano è la curva *c e h* costruita precedentemente; può l'intersezione proposta considerarsi anche, come l'effetto del piano segante dato con questa superficie cilindrica. Quindi la maniera di rappresentarla tal quale essa è nel piano segante, e di tirarle poi una tangente, si riduce allo Scol. 1. della Prop. prec.

PROP. 40. PROBL. 35.

91. *Costruire l'intersezione di una data superficie di rivoluzione con un piano di sito.*

Sol. Sieno il punto *a* e la retta $A'a'$ perpendi-
Fig. 28. colare alla $L'M'$ le rispettive projezioni su i due piani ortogonali dell'asse della superficie data, il quale supponesi verticale; e dinotino $F'f$, $F''f'$ le tracce del piano di sito che sia, come ne' due Probl. precedenti, perpendicolare a quello di projezione verticale; sarà $F''f'$ la projezione verticale dell' intersezione dimandata, ed i suoi limiti saranno i punti c', e' ne' quali la $F''f'$ incontra la generatrice della superficie proposta segnata sul piano verticale.

Ciò posto, s'intendano in questo piano tirate tan-

te rette $l'm'$ parallele alla $L'M'$, le estreme delle quali sieno quelle che passano pe' punti c', e', e per esse s'intenda passare una serie di piani orizzontali: dovrà ciascun di questi, incontrare il piano di sito, in una retta perpendicolare al piano verticale, in quel punto i', ove si tagliano le due corrispondenti tracce di essi $l'm'$, $F'f'$; ed avrà perciò una tal retta, per sua projezione verticale esso punto i', e per projezione orizzontale la perpendicolare $I'h$ alla $L'M'$ abbassatale dal punto stesso; ed intersegare la superficie di rivoluzione in un cerchio del raggio $d'g'$, che avrà per sua projezione orizzontale l'altro gkh che descrivesi col centro a e col raggio stesso; ed è chiaro che i punti k, h ne' quali questo taglierà la $I'h$ saranno le projezioni di que'punti dell' intersezione da costruirsi che esistono nel corrispondente piano segante orizzontale. Quindi, se in tal modo si determini una serie di punti h, k; la curva $ckeh$ che passerà per tutti essi sarà la projezione orizzontale dell'intersezione dimandata.

Per tirarle una tangente in un punto projettato orizzontalmente in h si costruisca la traccia orizzontale pl del piano tangente in un tal punto la superficie data (n.° 60.); e poi dal punto l ove questa incontra la $F'f$ si tiri all'altro h la retta hl, che sarà, come è facile ad intendersi, la projezio-

ne orizzontale della tangente cercata; e la verticale caderà nella $F'f'$.

92. *Scol.* 1. La maniera di costruire una tale intersezione tal quale è nel piano segante, e di tirarle poi una tangente, si riduce a quella del n.° 87., ragionando come nello Scol. della precedente Prop.

93. *Scol.* 2. Se la superficie proposta fosse quella di una sfera, e quindi un cerchio la curva d'intersezione; la curva $chek$ dovrà essere un' ellisse avente per asse maggiore una retta quanto la $c'e'$, e per asse minore l'altra $C'G'$.

Tav. ult. fig. c S' intenda, per facilità maggiore, passare il piano verticale pel centro della sfera; e poichè l'ordinata $J'h$ nella curva $chek$ deve pareggiare la corrispondente ordinata $i'H$ nella curva d'intersezione (n.° 16.); dovrà il quadrato di $I'h$ al par dell'altro di $i'H$ pareggiare il rettangolo $c'i'e'$, e perciò serbare all'altro rettangolo $C'I'E'$ la costante ragione di $c'e'^2 : C'G'^2$. Dunque ec.

Prop. 41. Probl. 36.

94. *Costruire l'intersezione di una data superficie cilindrica con quella di una data sfera.*

Sol. Suppongasi la generatrice della superficie ci-
Fig. 29. lindrica esser normale al piano orizzontale, e siano su di questo piano, la curva $chke$ la traccia di una tal superficie, i punti a, a' le projezioni ri-

spettive del centro della superficie sferica, e 'l cerchio $b\,f\,g$ la projezione orizzontale di questa. Ciò posto, si tiri nel piano orizzontale una qualunque retta $l\,m$ parallela alla $L'M'$, ed in modo che incontri le due curve $c\,h\,k\,e$, $b\,f\,g$; è manifesto, che se per essa si concepisca passare un piano verticale, questo dovrà incontrare la superficie cilindrica nelle sue generatrici che passano pe' punti h, k in dove la $l\,m$ incontra la curva $c\,h\,k\,e$, e la sfera in un cerchio del raggio $d\,g$, orizzontalmente projettato in essa $l\,m$ e che avrà per sua projezione verticale l'altro cerchio $h'k'h''$ descritto col raggio stesso e col centro a', e se si projettino su di questo i punti h, k, saranno i punti h',k',h'',k'' le projezioni verticali di altrettanti punti esistenti nel proposto piano segante e comuni alle due superficie date, cioè di altrettanti punti dell'intersezione dimandata. E determinando in simil modo le projezioni verticali degli altri punti di essa intersezione: se per tutti i punti h',k' si faccia passare una curva, ed un'altra pe' punti h'',k''; queste ne rappresenteranno la projezione verticale dell'intersezione.

La projezione orizzontale, è manifesto che sia la stessa traccia orizzontale $c\,h\,k\,e$ della superficie cilindrica. Si è dunque costruita una tale intersezione. Resta adesso a vedere in qual modo le si possa tirare una tangente in un suo qualsivoglia punto.

Dinoti *h* la projezione orizzontale di un tal punto: si tiri la tangente in *h* la curva *c h k e*, sarà questa la projezione orizzontale della tangente dimandata (n.° 85.); e se si determini la traccia orizzontale di quel piano che tocca la superficie sferica nel punto proposto (n.° 60.) e poi si projetti il punto dove questa s'incontra colla tangente del punto *h* sulla *L'M'*; la congiungente di questa projezione colla projezione verticale corrispondente del punto proposto, darà la projezione verticale della tangente dimandata.

95. *Scol.* Questo Probl. ha evidentemente due casi; potendo la superficie cilindrica penetrare con tutto il suo diametro quella della sfera e quindi incontrarla due volte, cioè all'entrare che fa in essa, e nell'uscirne, o pure solamente con una porzione di esso ed incontrarla perciò una sola volta.

L'identica costruzione di questi due casi, mi dispensa dall'esibirli separatamente; avvertirò solamente, che nel primo caso, ch'è quello della fig. 29., quel ramo di curva che passa pe' punti *h',k'* ne rappresenta una curva distinta dall'altra, che passa pe' punti *h'',k''*; dinotandone la prima la projezione verticale dell'intersezione inferiore, e la seconda quella dell'intersezione superiore; e che nel secondo caso essi due rami di curva, rientrano l'uno nell'altro e formano una curva sola.

PROP. 42. PROBL. 37.

96. *Costruire l' intersezione di una superficie conica a base qualunque e di quella di una sfera .*

Sol. Caso 1. Sieno primieramente concentriche queste due superficie , cioè che il vertice del cono sia centro della sfera , e sieno a , a' le projezioni del centro comune $p q p$ la traccia orizzontale data della superficie conica , $a'm'$ il raggio della sfera , e 'l cerchio $l'f'e'm'$ la projezione verticale di esso . Ciò premesso , si concepisca passarne per l' altezza orizzontale $A a$ del centro comune di esse due superficie una serie di piani , saranno questi tutti verticali , ed intersegherà ciascuno di loro la superficie conica in un sistema di rette , projettate tutte orizzontalmente nella traccia orizzontale di esso piano segante , e la superficie della sfera in un suo cerchio massimo ; ed i punti ne' quali s'incontreranno per ciascun piano quelle rette con questo cerchio si apparteranno all 'intersezione da costruirsi . Rappresenti la retta $n a d$ la traccia orizzontale di uno di questi piani , dovranno le generatrici nelle quali esso incontra la superficie conica passare per n , d ed esser projettate sulla $n d$: e se si abbassino da essi punti sulla $L'M'$ le perpendicolari nN' , dD' , congiunte le $N'a'$,

Fig. 30.

$D'a'$, ne dinoteranno queste le rispettive projezioni verticali delle stesse.

Per costruire que' punti in dove queste rette incontrano la circonferenza del cerchio segnato nella sfera dal piano stesso, si tiri per a la retta fag parallela alla $L'M'$ e poi s'intenda il proposto piano segante rivolgersi intorno alla Aa, finchè la nd coincida colla fe; è chiaro che in un tal moto non si varierà l'altezza orizzontale di essi punti d'intersezione, che i punti d, n descrivendo gli archi circolari dg, nf verranno ad applicarsi in g, f sulla fg, e che projettando questi in G', F' le $G'a$, $F'a'$ ne dinotino le projezioni verticali delle generatrici della superficie conica che passavano per d, n, nel nuovo sito che ha preso il piano segante che le contiene; ed i punti g', f' ov'esse interseghe-ranno rispettivamente la circonferenza $l'f'g'm'$, ch'è la projezione verticale dell'intersezione di esso piano colla superficie della sfera, considerata anche nella posizione ch'essa ha presa in virtù del movimento del piano, saranno le projezioni verticali de' punti dell'intersezione dimandata, considerati anche nella nuova posizione di un tal piano. Il perchè le projezioni di essi punti nel vero loro sito dovranno esistere nelle parallele $g'h', f'k'$ alla $L'M'$; tirate pe' punti $g'f'$, ed esser perciò i punti h', k' ove queste rette

incontrano rispettivamente le $D'a'$, $N'a'$ che doveano pur contenerle; e se si projettino i punti h', k' sulla nd in h, k saranno questi le corrispondenti projezioni orizzontali degli stessi punti d'intersezione. E facendo passare una curva $c'h'e'k'$ per tutti i punti h', k' determinati nel modo stesso, ed un'altra $chek$ per tutti i punti h, k, saranno queste le rispettive projezioni dell'intersezione proposta.

Volendole tirare una tangente in un suo punto projettato in h sul piano orizzontale, si costruisca la traccia orizzontale or del piano tangente in un tal punto la sfera (n.° 60.), e l'altra dr di quello che tocca nel punto stesso la superficie conica (n.° 59.); se dal punto d'intersezione r di queste due rette all'altro h si tiri la rh, sarà questa la projezione orizzontale della tangente cercata (n.° 83.); e projettato un tal punto r in R' e l'altro h in h' sul piano verticale; congiunta la $R'h'$, sarà questa la projezione verticale della stessa tangente.

Cas. 2. Se non sono concentriche le due superficie, si prenda per direttrice de' piani seganti quella retta che unisce i due centri loro, e stabiliscasi il piano di projezione verticale parallelo a questa: saranno pure linee rette le intersezioni di ciascun piano segante colla super-

ficie conica, e cerchi massimi quelle che han luogo colla sfera, e tutta la soluzione si condurrà a fine come nel caso precedente.

97. *Scol.* Il secondo caso di questo Probl., ammette anche una distinzione analoga a quella dello Scol. della Prop. prec.; e potrà ad esso estendersi quanto in questo si è detto. La stessa distinzione ha anche luogo pe' seguenti Problemi.

Prop. 43. Probl. 38.

98. *Costruire l'intersezione di due superficie cilindriche.*

Sol. Le due curve xgu, zfv rappresentino le tracce orizzontali di esse superficie; e sieno le cd, $C'd'$ le projezioni di quella retta alla quale si serba costantemente parallela la generatrice della prima di esse: ab, $A'b'$ le projezioni di quell' altra, cui è parallela la generatrice della seconda superficie; e per questa s'intenda passare un piano parallelo alla prima, del quale ne sia ae la traccia orizzontale. *Fig.* 31.

Or se a questa ae si tirino quante si vogliano parallele fg per le quali s'intendano poi passar de' piani paralleli a quello che passa per ae ciascun di questi intersegherà le due superficie cilindriche

in quelle loro generatrici, che passano pe' punti f, h, g, k, ne' quali le due curve zfv, xgu sono tagliate dalla rispettiva fg: ed è chiaro, che si apparteranno all' intersezione da costruirsi que' punti ne' quali queste generatrici s'incontrano.

Per determinarli: si tirino pe' punti f, h le rette fl, hm parallele alla ab saranno queste le projezioni orizzontali della generatrice della prima superficie cilindrica che passano pe' punti f, h; e projettando questi punti in F', H' sul piano verticale, le parallele $F'l'$, $H'm'$ alla $A'a'$ tiratele per F', H' dinoteranno le projezioni verticali delle stesse generatrici. Determinando in simil guisa le projezioni orizzontali gi, kn, e le verticali $G'i'$, $K'n'$ delle generatrici dell' altra superficie che passano per g, k, e che esistono colle prime in uno stesso piano segante: saranno i punti p, q, r, s, ne' quali si tagliano le projezioni orizzontali di esse, e gli altri p', q', r', s' in dove s'incontrano le verticali delle stesse, le rispettive projezioni di altrettanti punti d'intersezione di esse generatrici, cioè de' dimandati.

Se dunque si conduca per tutti i punti p, q, r, s così determinati una curva, sarà questa la projezione orizzontale dell'intersezione dimandata; e la verticale si otterrà, facendo passare per tutti i punti p', q', r', s' un'altra curva.

Per aver la tangente dell' intersezione costruita

in un suo punto projettato in s, s' su i due piani di projezione: si determinino le tracce orizzontali $h\,y$, $k\,y$ de' piani, che toccano in esso punto le due superficie cilindriche; e l'incontro y di queste due rette si projetti in Y'; congiunte le rette $s\,y$, $S'\,Y'$, saranno queste le projezioni della tangente cercata.

Prop. 44. Probl. 39.

99. *Costruire l'intersezione di due superficie coniche.*

Sol. Sieno a, a' le projezioni del vertice della
Fig. 32. prima di esse ed $x\,q\,y$ la sua traccia orizzontale: b, b' le projezioni del vertice dell'altra e $z\,f\,v$ la traccia orizzontale della stessa.

Concepiscansi congiunti i due vertici per una retta, la quale si prenda per direttrice de' piani seganti, avrà questa per sue projezioni le $a\,b$, $a'b'$: la traccia orizzontale di ciascun piano segante, potrà rappresentarsi con una retta qualunque $i\,f$ tirata pel punto i ove essa direttrice incontra il piano orizzontale; ed i punti f, h, g, k ne' quali la $i\,f$ incontra le tracce orizzontali delle due superficie coniche saranno quelli per dove passano le generatrici segnate in esse dal corrispondente piano segante; e che avranno per loro rispettive projezioni orizzontali, le congiungenti i punti f, h col punto b, e gli altri g, k con a; ed i punti p, q, r, s,

ne' quali queste quattro rette s'incontrano saranno le projezioni orizzontali di quelli ne' quali si tagliano le proposte generatrici, e che appartengonsi perciò all'intersezione dimandata. Se dunque per tutti questi punti così determinati si faccia passare una curva, sarà questa la projezione orizzontale di essa intersezione.

La projezion verticale della medesima si determinerà, costruendo le projezioni verticali delle generatrici che passano per gli stessi punti *f,h,g,k:* e poi conducendo una curva pe' punti p', q', r',s' ne' quali tali projezioni si segano; il che si otterrà con una costruzione del tutto simile a quella del Probl. prec.; e si opererà anche come in esso Probl. si è fatto, per tirare la tangente ad un punto dell'intersezione in questo costruita.

Prop. 45. Probl. 40.

100. *Costruire le intersezioni di due superficie di rivoluzione.*

Sol. Cas. 1. Abbiano primieramente esse superficie i loro assi in un piano stesso; e suppongasi un di questi perpendicolare al piano orizzontale, e 'l piano verticale parallelo a quello che vien determinato dagli assi stessi. *Fig.* 33.

Ciò posto, sia *a* la projezione orizzontale dell' asse verticale $A'a'$ la projezione verticale dello stesso $c'd'e'$ la curva generatrice della superficie corrispon-

dente, rappresentata sul piano verticale: e sia *ab* la projezione orizzontale dell'asse dell'altra, $B'a'$ la verticale, ed $f'd'h'$ la generatrice di una tal superficie, rappresentata anche sul piano verticale; è chiaro, che saranno a, a' le projezioni di quel punto nel quale i due assi si segano.

Concepiscasi adesso una superficie sferica avente per centro un tal punto, intersegarne le due superficie date; sarà projezione verticale di essa il cerchio $i'n'o'p'$ descritto col centro a' e col raggio della sfera; una tal superficie avendo l'asse di comune con ciascuna delle date, intersegherà, come è chiaro, ognuna di queste in un cerchio, perpendicolare all'asse della stessa. Che perciò, la projezione verticale dell'intersezione della sfera colla prima di queste superficie, sarà la retta $n'o'$ perpendicolare alla $A'a'$, e l'orizzontale sarà un cerchio descritto col centro a e col diametro $n'o'$; e l'intersezione della stessa superficie sferica coll'altra delle date, avrà parimente, per sua projezione verticale la retta $k'p'$ perpendicolare alla $a'B'$; e 'l punto r' nel quale si segnano le $n'o'$, $k'p'$ sarà come è chiaro, la projezione verticale di que' due punti ne' quali si tagliano le circonferenze de' due cerchi projettate verticalmente in $n'o'$, $k'p'$, cioè di due punti dell'intersezione da costruirsi. Se dunque per tutti i punti r' così determinati si conduca una curva, sarà questa la projezione verticale di essa intersezione.

Projettando ciascun punto r' sulla circonferenza del cerchio corrispondente nko in r, r; saranno questi le projezioni orizzontali de' due punti d'incontro delle circonferenze de' cerchi che si trovano sulla stessa sfera; e la curva tirata per tutti essi punti r similmente determinati sarà la projezione orizzontale dell'intersezione stessa.

Cas. 2. Esistano in secondo luogo gli assi delle due superficie date in piani diversi; e si continui *Fig.* 34. tuttavia a supporre un di loro perpendicolare in a al piano orizzontale e 'l piano verticale parallelo ad entrambi; dovrà la projezione orizzontale dell'asse dell'altra, esser parallela alla $L'M'$: dinotino finalmente le $A'a'$, $B'b'$ le projezioni verticali rispettive di essi assi, e le curve $a'c'd'$, $b'd'g'$ le generatrici delle corrispondenti superficie segnate sul piano verticale.

Ciò posto, suppongansi tirate nel piano verticale delle rette $F'f'$ tutte perpendicolari alla $B'b'$; e per queste passarne de' piani normali al verticale stesso: ciascun di questi piani segnerà nella superficie di rivoluzione che ha l'asse verticale, una curva della quale potrà determinarsene pel n.° 91 la projezione orizzontale rct; ed incontrerà l'altra superficie in un cerchio che avrà per sua projezione l'ellisse rtg (n.° 93): ed i punti r, t ne' quali queste due curve s'incontrano saranno le projezioni orizzontali di altrettanti punti dell'interse-

zione da costruirsi che esistono in uno stesso piano segante. Se dunque per tutti questi punti r, t similmente determinati si faccia passare una curva, questa ne rappresenterà la projezione orizzontale di essa intersezione.

Projettando i punti r, t sulle rispettive tracce $F'f'$ di quel piano segante nel quale contengonsi i punti d'intersezione de' quali essi ne sono le projezioni orizzontali; e poi tirando per tutti i punti r', t' in tal modo determinati nna curva; si otterrà la projezione verticale dell'intersezione.

Per condurre una tangente ad un punto di essa si operi come si è indicato nel n.° 83 (1).

101. *Scol. Generale*. Costruita che si è una delle projezioni dell'intersezione di due superficie curve; l'altra di esse può costruirsi, o indipendentemente dalla già costruita, come nella Prop. 43., o pure si può ottenere, projettando ciascun punto della prima nell'altra projezione su di quella linea che deve contenerlo, come si è praticato ne' due casi della Prop. 45: e questo secondo modo, può servire non solamente di verificazione al primo; ma anche ad evitare in certi casi le intersezioni di rette che s'incontrerebbero sotto angoli ottusissimi.

(1) *Non ho segnati in questi ultimi Problemi i limiti della serie delle superficie seganti, essendo facile cosa il conoscerli.*

Gli esempj finora rapportati, che contengono tutti i principali casi delle intersezioni delle superficie curve mostrano a sufficienza, come debba applicarsi a delle quistioni particolari, il metodo proposto ne' due Problemi generali (n.° 81, 83).

Gli allievi ritrarranno da essi un gran vantaggio per la pratica, applicandosi a costruirne degli analoghi in grandi dimensioni, colla maggior esattezza, e segnando, per quanto è possibile, le curve in tutta la loro estensione.

CAP. V.

Dello sviluppo delle superficie curve.

102. *Def.* Lo sviluppo di una superficie curva è la riduzione di essa in un'altra piana, le cui parti sieno continue.

L'oggetto di questo sviluppo è 'l disegno più facile e più comodo delle curve che sonosi considerate su di essa.

103. *Scol.* Partendo dall'idea dello sviluppo data nella definizione; è facile il vedere quali condizioni lo rendan possibile. E primieramente, considerando le superficie composte da piani, si vede bene che può svilupparsi la superficie di una piramide o di un prisma, quando le facce di questi solidi, e per conseguenza i loro lati si prendono come infiniti, cioè che essi si considerano co-

me privi di base; e che in generale sia sviluppabile una superficie composta da piani, se questi incontrandosi, non formino che angoli diedri, e che sieno perciò infinite quelle rette nelle quali si-segano scambievolmente. Or supponendo che il numero de' piani componenti una superficie sviluppabile, si multiplichi all'infinito; è manifesto che una tal superficie, tuttavia sviluppabile, diverrà curva a lati rettilinei infiniti, e che sarà perciò suscettibile di essere toccata da un piano in tutta la lunghezza di un suo lato: e saran queste le condizioni necessarie allo sviluppo di una superficie curva qualunque.

Si vede da ciò, che sieno insuscettibili di sviluppo, le superficie de' poliedri in generale, quelle de' solidi di rivoluzione, e de' solidi difformi.

Prop. 46. Probl. 41.

104. *Sviluppare una superficie cilindrica, e rapportar poi su questo sviluppo una curva segnata su di essa, della quale ne sono date le due projezioni.*

Sol. Prendasi per piano di projezione orizzontale, un piano che seghi ovunque la superficie proposta perpendicolarmente alla sua retta generatrice; sarà questa, in tutte le sue posizioni, perpendicolare alla curva d'intersezione da un tal piano segnata sulla superficie cilindrica. Ciò posto,

Fig. 26. *n°.* 2.

si esponga una retta uguale a questa curva, e da un' estremo di essa *P* se ne ascindano le parti *PQ, QR, RS, &c.* rispettivamente uguali alle parti *h h, h c, c k &c.* di una tal curva, incominciando da un suo punto qualunque, e nell'ordine come si sono indicate: da' punti *P,Q,R, &c.* si elevino sulla *PR* delle perpendicolari indefinite, che rappresenteranno, sullo sviluppo della superficie cilindrica, le tracce della retta che la genera nelle posizioni *h,h,c,k &c.*; ed ascisse da esse le parti *Pp,Qq,Rr,&c.* uguali rispettivamente alle altezze orizzontali di que' punti dell'intersezione data in essa, che trovansi nella generatrice che passa per essi punti *h,h,c,k,&c.* cioè a dire uguali alle rispettive *T't'*: la curva *pqrs* che passerà per tutti questi punti, ne rappresenterà una tale intersezione disegnata sullo sviluppo della superficie cilindrica.

Per determinare qual posizione prende su di questo disegno la tangente di essa intersezione in quel suo punto che corrisponde a *q*: si concepisca lo sviluppo della superficie cilindrica eseguirsi sul piano che la tocca in un tal punto; è chiaro che la *h l* traccia orizzontale di questo piano tangente, che è pure la projezione orizzontale determinata di quella retta che tocca nel punto stesso la curva d'intersezione, si adatterà sulla *PR* da *Q* in *L*. Se dunque prendasi sulla *PR* la *QL* uguale

alla $h\,l$; congiunta la $q\,L$, sarà questa la retta che tocca la curva d'intersezione ridotta sul disegno.

105. *Scol.* Si tiri da un punto m ad un' altro n presi sullo sviluppo della superficie cilindrica la retta $m\,n$; è chiaro (n.° 2.) che avrà questa due proprietà; cioè quella d'intersegare tutte le generatrici Pp, Qq, Rr, *&c.* sotto lo stesso angolo, e l'altra di esser la più breve delle linee che possono attraversare questi due punti. Or siccome non cambiasi sullo sviluppo, ne l'estensione della superficie cilindrica, ne quella di una curva in essa segnata, ne finalmente la posizione rispettiva di questa colla generatrice in tutti i siti; ne segue che quella curva, sulla superficie cilindrica ch'è dinotata da $m\,n$ sullo sviluppo, debba esser la più breve di tutte le altre contermini segnate sull'istessa superficie, ed incontrar la generatrice sempre sotto lo stesso angolo.

Una tal proprietà, non si limita alle sole superficie cilindriche; essa ha anche luogo nelle superficie coniche; ed in generale in tutte le superficie sviluppabili. Si dà a questa specie di curve il nome di *elici*.

PROP. 47. PROBL. 42.

106. *Sviluppare una superficie conica a base qualunque; ed indi segnare sul suo sviluppo una curva data in essa.*

Sol. Si costruisca l'intersezione della proposta superficie con un'altra sferica concentrica (n.° 96. Cas. 1.) è evidente che tutti i punti di quest'intersezione essendo equidistanti dal vertice della superficie data, debbano pure trovarsi ad uguali distanze da un tal punto sullo sviluppo di essa, ed esserne perciò allogati in un'arco circolare descritto col vertice come centro e con un raggio uguale a quello della sfera. Sia T il centro di un tal'arco indefinito XYZ, ed X un punto preso in esso, corrispondente all'altro sull'intersezione sferica ch'è projettato in c, c', dal quale bisogna incominciare a portare su di un tal'arco circolare gli archetti di essa intersezione. Or, perchè ciò sia eseguibile, è necessario di privare prima l'intersezione sferica delle due sue curvature, senza alterare la sua grandezza; al che fare; si consideri essa intersezione, come l'effetto dell'incontro della superficie cilindrica verticale che ha per traccia orizzontale la curva $c\,h\,e\,k$ colla stessa superficie sferica, e si rapporti sullo sviluppo di una tal superficie cilindrica l'intersezione proposta (n.° 86.); ne dinoterà, com'è chiaro, la curva $p\,q\,r\,s$ essa interse- *Fig.* 30. *n.°* 2. 3.

zione privata di una delle sue curvature. Se dunque si sviluppi questa curva per ripiegarla sull'arco XYZ, vale a dire che si porti, per esempio l'arco pq da X in Y, il punto Y sarà sulla superficie conica sviluppata.

Finalmente se su di ciascun raggio TV si prenda un punto V il quale disti dall'altro T per quanto è distante dal vertice A della superficie conica proposta quel punto della curva in essa segnata che trovasi in quel suo lato che vien dinotato da TV sullo sviluppo; la curva che passerà per tutti essi punti V in simil modo determinati sarà la proposta sulla superficie conica rapportata sul suo sviluppo.

107. *Scol.* Le superficie sviluppabili quassù considerate, non sono che due casi particolari delle superficie di questo genere; ma siccome le ricerche generali su questo argomento, che sono, per altro, di un'uso poco frequente, esigono de' metodi che non debbono quì aver luogo, ho tralasciato perciò di occuparmene.

CAP. VI.

Applicazione de' Metodi precedenti alla soluzione di alcuni Problemi di Geometria .

Prop. 48. Probl. 43.

108. *Descrivere una sfera per quattro punti dati ; cioè determinare la posizione del suo centro , e la grandezza del raggio .*

Sol. S'intendano dal punto A , uno de' dati , condotte agli altri tre B,C,D le rette AB,AC,AD; avranno queste per loro projezioni orizzontali le ab, ac, ad che dalla projezione orizzontale a del punto A tiransi alle altre b, c, d degli altri tre punti; e per projezioni verticali le altre rette $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$ che dal punto a' projezione verticale di A si tirano alle projezioni verticali b', c', d' de' medesimi. Ciò premesso , si bisechino la ab, $a'b'$ ne' punti e, e', saranno questi , com'è chiaro , le projezioni rispettive del punto medio della AB ; pel quale , se facciasi passare un piano perpendicolare ad essa retta (n.° 36.) ; dovrà ciascun punto preso in esso , essere equidistante dagli altri $A, B,$; ed esser perciò esso un luogo del centro cercato. Costruendo similmente i piani perpendicolari alle AC, AD ne' loro punti medj , che sono due altri luoghi del centro stesso ; resterà un tal punto determinato dall'intersezione di questi tre piani ; ed esibendo

sul piano orizzontale e sul verticale le projezioni delle comuni sezioni di uno di tali piani cogli altri due (n.° 34.) sarà la projezione orizzontale del centro cercato quel punto dove s'incontrano le projezioni orizzontali di esse, e l'altro nel quale si tagliano le projezioni verticali, ne sarà la projezion verticale. Ed unendo in ciascuno de' piani di projezione, la projezione del centro con quella di uno stesso de' punti dati, si otterranno le projezioni rispettive del raggio della sfera, determinate in grandezza, e da essa se ne rileverà quella del raggio stesso (n.° 27.).

109. *Scol.* Potendosi prendere ad arbitrio i piani di projezione, ecco in qual modo potrà semplificarsi la costruzione di questo Problema.

Prendasi per piano orizzontale quello che passa
Fig. 35. pe' tre punti A,B,C, e sia l'altro punto D projettato in d su di questo: congiungansi le AB,AC,BC, Ad, ed a quest'ultima le si tiri nel piano stesso una parallela $L'M'$, per la quale si concepisca passare il piano di projezione verticale; caderanno le projezioni verticali de' punti A,B,C nella $L'M'$ in A',B',C', e quella del punto D in un punto d' della perpendicolare $dD'd'$ ad essa $L'M'$.

Ciò posto, si bisechino le AB, AC, e da' loro punti medj e,f le si erigano, nel piano ABC, le perpendicolari eg,fg; saranno queste le tracce orizzontali di due piani verticali perpendicolari ad

esse AB, AC ne' loro punti medj: e dovendo il centro della sfera cercata trovarsi nell' intersezione di questi, ch'è perpendicolare in g al piano ABC, sarà g la sua projezione orizzontale.

Or dovendo essere, a cagione della posizione che si è data al piano verticale, la AD parallela alla sua projezione verticale $A'd'$; il piano ch'è perpendicolare alla AD nel suo punto medio, lo dovrà essere anche al piano verticale, e passare colla sua traccia pel punto h' medio della $A'd'$; sarà perciò questa traccia dinotata dalla perpendicolare $h'g$, tirata per h' alla $A'd'$: e dovendo il centro cercato esistere in esso piano, dovrà la projezione verticale sua cadere nella $h'g'$; sarà dunque questa il punto g' ove la perpendicolare $gG'g'$ da g abbassata sulla $L'M'$ incontra essa $h'g'$. Finalmente, essendo Ag, $A'g'$ le projezioni del raggio, è chiaro, che se prendasi $G'F'$ uguale alla Ag, congiunta $g'F'$, sarà questa quant'il raggio.

PROP. 49. PORBL. 44.

110. *Iscrivere una sfera in una piramide triangolare, data: cioè determinare la posizione del suo centro, e la grandezza del suo saggio.*

Sol. Prendasi per piano orizzontale la base della piramide data, e fatti passare pe' suoi tre lati tre piani, che le sieno inclinati ad angoli, metà di

quelli sotto a' quali le sono inclinate le corrispondenti facce di essa piramide; dovrà il centro della sfera cercata esistere, come si può facilmente comprendere, in ciascuno di questi piani; ed esso si esibirà nel modo stesso che si è indicato nel Problema precedente. Finalmente il raggio di questa sfera dovrà essere quanto la perpendicolare che dalla projezione verticale del centro si abbassa sulla comune sezione de' piani di projezione (n.° 24.).

111. *Scol.* Per costruire questo Problema, esigonsi due cose; primieramente si vuol saper determinare l'inclinazione di ciascun faccia della piramide alla base sua; e poi bisogna costruire quel piano che biseca quest'angolo diedro. Or sebbene, queste due cose comprendansi nelle soluzioni del Probl. 14 e del suo Scolio; esse possonsi non pertanto eseguire più facilmente nel caso presente nella maniera che quà giù ne rapporto.

Sieno a, a' le projezioni del vertice della pira-
Fig. 38. mi de proposta, e BCD la sua base. Si abbassi da a su di un lato BC la perpendicolare ah, ed ascissa sulla $L'M'$ dal punto A' la $A'H'$ uguale alla ah, si unisca la $a'H'$, sarà l'angolo $A'H'a'$ uguale all'altro ahA, cioè all'inclinazione della faccia della piramide che passa per BC alla sua base BCD: e se si bisechi l'angolo $A'H'a'$ colla $H'f'$, sarà il punto p', ove questa incontra la $A'a'$, la

projezione verticale di quello in dove l'altezza *Aa* è incontrata dal piano che biseca l'angolo diedro che il piano che passa per *BC* comprende colla base. Un tal piano potrà dunque esibirsi pel (n.°42.).

PROP. 50. PROBL. 45.

112. *Costruire le projezioni di un punto il quale serba distanze date da tre altri dati nello spazio.*

Sol. Si prenda per piano orizzontale quello che passa pe' tre punti dati *B,C,D* e congiunta la *BC* si innalzi per un qualsivoglia suo punto *Y'* la perpendicolare *L'M'*, e per questa s'intenda poi passare il piano di projezione verticale. Ciò posto, co' centri *B,C,D*, e colle distanze date α, β, γ prese rispettivamente per raggi, si descrivano tre cerchi; questi si taglieranno due a due ne' punti *E,F; H,J; K,G*, e se si uniscano le *EF,HJ,KG*, saranno queste le projezioni orizzontali de' tre cerchi verticali ne' quali s'incontrano due a due le tre sfere che sono le locali del punto cercato (n.° 6.) e 'l punto unico *a* ov' esse si tagliano (not. del n.° 6) sarà la projezione orizzontale di questo punto. *Fig.* 36.

Or se col centro *Y'* e con un raggio quanto la *YK* si descriva un cerchio; è evidente che sia questo la projezione del cerchio projettato in *GK* nel quale s'intersegano due delle superficie proposte, e nella cui circonferenza esiste il punto cercato: se dunque, il punto *a* si projetti sulla cir-

conferenza $G'a'K'$ i punti a' ne' quali questa viene incontrata dalla perpendicolare $a\,a''a'$ alla $L'M'$ saranno indistintamente le projezioni verticali di esso punto .

PROP. 51. PROBL. 46.

113. *Costruire le projezioni di un punto che serba distanze date da tre rette di sito* (1) .

Scol. Si determinino i punti ne' quali le tre rette date incontrano un' istesso piano di projezione, per esempio , l'orizzontale (n.° 26.) , e poi preso per centro ciascuno di questi punti , co' semiassi , il minore quanto la distanza rispettiva che da ciascuna di esse ne serba il punto cercato , e 'l maggiore quanto la quarta proporzionale in ordine al seno dell'angolo d'inclinazione orizzontale dell'istessa retta di sito , al raggio , e ad una tal distanza, preso un tal'asse sulla projezione orizzontale di una tal retta , si descriva un' elisse ; sarà questa la traccia orizzontale di quella superficie cilindrica , ch' è una delle tre locali del Problema (n.° 7.) . Se dunque si costruiscano le intersezioni di una di queste con ciascuna delle altre due (n.° 98.) : que' punti ne' quali si taglieranno le projezioni rispetti-

(1) *Questo Probl. ed il precedente sono , com' è chiaro , la composizione Geometrica del* 1. *e* 2. *Problema* .

ve di queste due intersezioni, ne rappresenteranno su di ciascuno de' piani di projezione le projezioni corrispondenti di que' punti che soddisfano al Problema, e tra quali esiste il cercato.

Prop. 52. Probl. 47.

114. *Determinare il vertice di una piramide triangolare, dati i lati della sua base, e gli angoli compresi dalla sua altezza co' lati dell'angolo verticale.*

Soluzione Geometrica.

Dal punto *a* ove l'altezza della proposta piramide supponesi incontrarne la base s'intendano tirate a' vertici degli angoli *B, C, D* di questa le rette *a B, a C, a D*; saran dati di specie i triangoli *B a A, C a A, D a A*, come quelli che oltre all'angolo retto, hanno un'angolo dato; quindi sarà data la ragione che ciascuna di esse tre rette serba alla *a A* stessa; e per conseguenza quella di una di essè all'altra. *Fig.* 37.

Se dunque s'inclinino da' punti dati *B,C,D* tre rette che convenghino in uno stesso punto *a* e sieno in ragion data, si farà noto il punto *a*; e ritrovando in ordine a' termini della ragione che una di queste, la *B a*, per esempio, serba alla *A a*, ed ad essa *Ba* una quarta proporzionale sarà questa l'altezza *A a*. Il sito del vertice si è dunque determinato.

Soluzione Descrittiva. *Fig.* 38.

Prendendo adesso il piano *BCD* come quello di

projezione orizzontale; si determini come nella soluzione geometrica il punto a, che sarà, com'è chiaro, la projezione orizzontale del vertice della piramide. Si abbassi da questo sulla $L'M'$ la perpendicolare $aA'a'$, e tagliata su di essa $L'M'$ la $A'K'$ uguale a Ba, si formi al punto K' l'angolo $A'K'a'$, uguale all'altro aBA ch'è complemento del dato BAa (*fig.* 37.): sarà il punto a' ove si segano le $K'a'$, $A'a'$ la projezione verticale del vertice stesso.

115. *Scol.* La costruzione del problema proposto è fondata sull'altro d'inclinare da' punti B,C,D tre rette ad un punto a le quali sieno in data ragione: eccone di questo la soluzione.

Essendo $aB:aD::m:n$, se si divida la BD in *Tav. ult.* E in questa ragione, dovrà la Ea bisecare l'an- *Fig. d.* golo BaD. Si supponga costruito al punto a l'angolo EaF uguale all'altro aEF; sarà, come può facilmente rilevarsi, l'angolo DAF uguale all'altro EBa; il perchè i due triangoli DaF, BaF saranno simili; e quindi dovendo stare aF o $FE:aB::FD:Da$, sarà permutando $FE:FD::aB:aD$, cioè $::m:n$ e dividendo $ED:DF::m-n:n$.

Se dunque si trovi in ordine ad $m-n$, n ed ED la quarta proporzionale DF, e poi si descriva col centro F, intervallo FE un cerchio, sarà, com'è chiaro, la circonferenza di questo un luogo geometrico del punto cercato; e determinando simil-

mente l'altro cerchio la cui circonferenza è la locale dell'altra condizione che $Ba : aC :: m : r$: resterà il punto cercato, determinato dall'intersezione di queste due circonferenze.

PROP. 53. PROBL. 48.

116. *Dati in una piramide triangolare i lati della base ed i tre angoli al vertice suo: costruire le projezioni di questo punto.*

Sol. Descrivansi su i tre lati della base tre porzioni di cerchio capaci di contenere ciascuna rispettivamente uno degli angoli dati; e poi si concepiscan queste rivolgersi intorno alle loro corde: genereranno così tre superficie curve, le quali saranno, com'è chiaro, le locali del punto cercato. *Fig.* 39.

Se dunque, presa la base BCD della piramide per piano di projezione orizzontale, si costruiscano su di essa le projezioni delle intersezioni di una delle tre superficie curve colle altre due, sarà il punto ove si tagliano queste due curve la projezione orizzontale del vertice della piramide proposta: e costruendo la projezione verticale dell'intersezione di due di esse superficie; il punto ove una tal curva verrà incontrata dalla perpendicolare alla $L'M'$ abbassatale dalla projezione orizzontale del vertice già determinata, ne dinoterà la projezione verticale dello stesso.

117. *Scol.* Se questo Problema si risolva coll'ana-

lisi algebrica, la sua equazione ascenderà generalmente all'ottavo grado (1); il che mostra, che il

---

(1) *S'indichino le AB,AC,AD (fig. 37.) con x,y,z, e le BC,CD,DB con a,b,c, sarà il triangolo*

$$BAC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2)}$$

$$ACD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(4b^2y^2 - (b^2 - z^2 + y^2)^2)}$$

$$ADB = \tfrac{1}{4}\sqrt{(4c^2x^2 - (c^2 - z^2 + x^2)^2)}$$

Or deve stare, per esser dato l'angolo in A in ciascuno di questi triangoli. il rettangolo de' lati all' aja in data ragione. Dunque sarà

Pel triangolo BAC $xy : \tfrac{1}{4}\sqrt{(4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2)}$ *in data ragione, e quindi anche* $4x^2y^2 : 4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2$ *in ragion data; e se si formi il quadrato di* $a^2 - y^2 + x^2$, *e si sottragga da* $4a^2x^2$, *e poi si converta la ragione che ad una tal quantità ne serba* $4x^2y^2$, *sarà* $4x^2y^2 : a4 - 2a^2y^2 + y4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + x4 :: m^2 : n^2$; *ed estraendo dal conseguente della prima ragione la radice quadrata, sarà*

$$2xy : a^2 - y^2 - x^2 :: m : n, \text{ e quindi}$$

$$a^2 - y^2 - x^2 = \frac{2mxy}{n}$$

Similmente operando per gli altri due triangoli, si troverà

$$b^2 - z^2 - y^2 = \frac{2mzy}{p}$$

$$c^2 - z^2 - x^2 = \frac{2mzx}{q}$$

Problema proposto ne trae necessariamente seco altri sette analoghi. Per determinar quali sieno, basta riflettere, che siccome rivolgendosi i segmenti *BGC, CED, DFB* intorno alle loro rispettive corde, si debbono anche rivolgere i loro supplementi *BgC, CeD, DfB* intorno alle stesse, vi saranno perciò sei superficie curve descritte dagli uni e dagli altri da ciascuna parte del piano *BCD*. Ciò posto

S'indichino i segmenti *BGC, CED, DFB* con *P,Q,R* ed i loro rispettivi supplementi con *p,q,r*, saranno le combinazioni di essi segmenti tre a tre in numero di venti, ed espresse da *PQR, QRp, PRq, PQr, pqr, qrP, prQ, pqR; PQp, PQq, QRq*, ec., delle quali, essendo impossibili le ultime dodici, non potendosi giammai intersegare un'arco circolare col suo supplemento, se essi rivolgonsi intorno alla loro comune corda, restano le sole pri-

---

ed essendo queste tre equazioni di secondo grado, la loro eliminata ch'è l'equazione al Problema proposto, dovrà per le note regole dell'Algebra abbassarsi all'ottavo grado.

Il Sig. La-Croix *ne' suoi Elementi di Geometria Descrittiva cita una soluzione di questo Problema dell' insigne Analista la* Grange, *inserita negli Atti di Berlino, anno 1775; ma tutte le mie ricerche fatte in questo volume ed in molti altri, sono riuscite affatto nutili.*

me otto, che ne esprimono otto diversi modi ne' quali possonsi combinare le sei superficie curve per risolvere il problema proposto ed i sette altri analoghi.

Or siccome di un tal Problema che spesso può occorrere in pratica, trattandosi di determinare il sito di un punto, misurati che si sieno con un grafometro gli angoli, che le visuali da esso condotte a tre altri punti di sito comprendono tra loro, non esistono a cagione del suo grado de' metodi da poterlo geometricamente costruire: trattandosi di una costruzione da servire in pratica, ne proporrò una congegnata in quel modo che gli antichi solevano tenere, quando la Geometria non valeva a risolvere un qualche Problema che loro veniva proposto, e ch'essi lo avevano come atto a dar de' risultati *ad manuum operationes maxime accomodatos* (1). Servirà esso a' Giovani anche per un' esempio di un tal metodo, che potranno applicare ad altre quistioni analoghe.

Si costruisca coll'ajuto di una scala Geometrica un triangolo *b c d* simile a quello che comprendono *Fig.* 40.

(1) *Pappo ci rapporta le soluzioni del Problema delle due medie proporzionali, fatte da Eratostene e da Erone; e da Diogene Laerzio abbiamo che Archita il primo si servì del moto organico per la soluzione di un tal Problema.*

le rette che uniscono i punti di sito, e costruito un'angolo solido *A* co' tre angoli dati; si vada adattando esso triangolo *bdc* dentro ad un tal'angolo in modo, che i vertici *b,d,c* degli angoli suoi corrispondano a que' lati dell'angolo *A* che sono ad essi rispettivi; è manifesto, che quando si sarà pervenuto a far cadere i punti *b,c,d* su i lati di un tal' angolo; dovranno le *Ab,Ac,Ad*, che restan determinate, esprimerne in parti della stessa scala i lati della piramide proposta, cioè le tre visuali che dal punto cercato vanno a' tre punti di sito.

Ciò premesso, se dal vertice *A* si abbassino sulle basi *bd,dc* de' due triangoli dati *bAd,cAd* le perpendicolari *Ae,Af*, e poi da' punti *e,f* si elevino sulle stesse nel piano *bac* le perpendicolari *ea,fa*; congiunta la *Aa*, sarà questa, come facilmente si comprende, l'altezza della piramide *Abdc* determinata di magnitudine e di sito, dalla quale, sarà facile il ricavarne per mezzo della scala la grandezza e 'l sito di quella della piramide proposta; cioè la posizione del punto cercato.

Prop. 54. Probl. 49.

118. *Determinare le projezioni di due o più punti nello spazio; dati che sieno non meno gl'angoli che le linee da essi condotte a due altri punti di sito posti in una stessa linea verticale, comprendono con questa, che l'altro contenuto da due di tali linee, le quali vanno ad uno stesso de' punti dati.*

Sol. Rappresentino a',b' le projezioni verticali de' *Fig.* 41. punti dati A,B,a l'orizzontale, e C,D i punti da determinarsi. Si costruiscano sulla $a'b'$ ch'è quanto la AB, e nel piano verticale, i due triangoli $a'c'b'$, $a'd'b'$, che abbiano gli angoli in a',b', uguali rispettivamente a quelli, che le CA,CB,DA,DB comprendono colla verticale ABa; è chiaro che i vertici c',d' di questi triangoli disteranno pertanto dalla $a'A'$, per quanto distano i punti C,D dalla Aa, e che siano di più essi, tanto alti sulla $L'M'$ quanto gli stessi C,D sul piano orizzontale.

Se dunque si tiri dal punto a nel piano orizzontale una retta ad arbitrio, per dinotarne la projezione orizzontale della CA, che potrà perciò essere la al parallela alla $L'M'$; e che poi costruiscasi la projezione orizzontale lan dell' angolo dato CAD (n.° 47): prese su i lati al,an di questa le parti ac,ab uguali alle $e'c',f'd'$ rispettivamente; saranno i punti c,d le projezioni orizzontali de' proposti C,D; e sarà la projezion verticale di C il punto c', e di D l'altro h' in dove la perpendicolare dD' alla $L'M'$ incontra la $d'f'$. E coll' istesso artifizio si determinerà il sito di tutti quegli altri punti a' quali si competeranno le stesse condizioni.

FINE.

Errori essenziali a corriggere.

Pag. 15 lin. 6, dopo *piani di projezione*, aggiungasi *la sua projezione*

16 lin. 4, 5, 26 $L'm'$, leg. $L'M'$, lin. 22 $Aa = CB$, leg. $Aa = Cb$

21 lin. 24 $F'E'$, leg. $f'E'$

26 lin. 4 $A'a'$, $A'a'$, leg. $A'a$, $A'a'$, lin. 22 eH, leg. eh

29 lin. 13 $B'a'$, leg. $B'A'$

31 lin. 22 gK, $g'K'$, leg. gk, $g'k'$, lin. 24 K, K', leg. k, k'

45 lin. 25 *e* leg. *c*

66 lin. 2 tolgasi quel *da un'equazione*

76 lin. 16 $h'k$ leg. h, k

79 lin. 2 $mP'Q'$, leg. in $P'Q'$; lin. 25 *della*, leg. *la*

82 lin. 12 e lin. 20 mutisi il G' in E'

90 lin. 3 Ky, leg. gy, lin. 12 xqy, leg. xgu

AVVISO.

Coloro i quali sanno bene quanto sia difficil cosa l'ottenere la stampa di un libro di Matematiche esatta, principalmente se essa non si fa coll'assistenza dell'autore, mi scuseranno degli errori quì notati, e di quelli altri che ho tralasciati, perchè incapaci a poter cagionare equivoco.

Imprimatur

Si videbitur Rmo Pat. Mag. Sac. Palat. Apost.

Benedictus Fenaja Congreg. Missionis
Patriarc. Constant. Vicesg.

Imprimatur

Fr. Jo. Bapt. Chiesa Ord. Præd. Mag., Rmi P. Mag.
Sac. Pal. Apost. Soc.

610739